


600030373M


G.65. B. 19



LEHRBUCH

DER

KRYSTALLOGRAPHIE

VON

VIKTOR VON LANG

O. Ö. PROFESSOR DER PHYSIK AN DER K. K. UNIVERSITÄT ZU WIEN, WIRKLICHES MITGLIED DER KAIS. MINERALOGISCHEN GESELLSCHAFT ZU ST. PETERSBURG.

MIT 7 LITHOGRAPHIRTEN TAFELN.

WIEN, 1866.

WILHELM BRAUMÜLLER

K. K. HOF- UND UNIVERSITÄTSBUCHHÄNDLER.

Druck von C. Ueberreuter in Wien.

VORWORT.

Von den Krystallen weiss man in Betreff ihrer Form bis jetzt, dass die Quotienten aus den Parametern ihrer Flächen sich wie rationale Zahlen verhalten, und dass dieselben, was die Anordnung ihrer Flächen anbelangt, in 6 Abtheilungen, Systeme zerfallen. Freilich unterlag die Anzahl dieser Systeme verschiedenen Angriffen, und geschieht diess auch jetzt noch, obwohl vom physikalischen Standpunkte lange aller Zweifel behoben war. Indem ich das System eines Krystalles als dessen Symmetrie nach einer bestimmten Anzahl Ebenen definire, habe ich zu dem ersten Hauptgesetze der Krystallographie im §. 26 dieses Buches ein zweites gefügt, welches die Symmetrieverhältnisse der Krystalle beherrscht, und aus welchem sich auch auf krystallographischem Wege ergibt, dass nur 6 Krystallsysteme möglich sind. Freilich hat dieses Gesetz nur den Werth eines Erfahrungssatzes, aber auch das ist vielleicht nicht ganz ohne Werth; denn wenn alle unzweifelhaften Fälle sich zu einem Satze vereinigen lassen, so dürfte wohl einerseits die Wahrheit dieses Satzes wahrscheinlich sein, andererseits aber dürften die nicht darin enthaltenen zweifelhaften Fälle ziemlich allen Werth verlieren.

Den Leser erlaube ich mir hier auch noch auf die im Nachfolgenden zum erstenmale gemachte Unterscheidung zwischen Holo- und Hemisymmetrie der Krystalle aufmerksam zu machen. Dieselbe ist für die physikalischen Eigenschaften der Krystalle von grosser Wichtigkeit, obwohl sie für Den überflüssig ist, der in

den Krystallen kein interessantes Problem der Molekularphysik erblickt, sondern sich bloss die Ermittlung krystallographischer Konstanten zur Aufgabe gemacht hat. Für Denjenigen aber, der auch die physikalischen Eigenschaften der Krystalle in Betracht ziehen will, und diess wird selbst vom praktischen Standpunkte täglich nöthiger, dürfte die in den vier ersten Kapiteln dieses Buches mit den einfachsten mathematischen Hilfsmitteln gegebene Darlegung der beiden Hauptgesetze der Krystallographie vielleicht von einigem Nutzen sein.

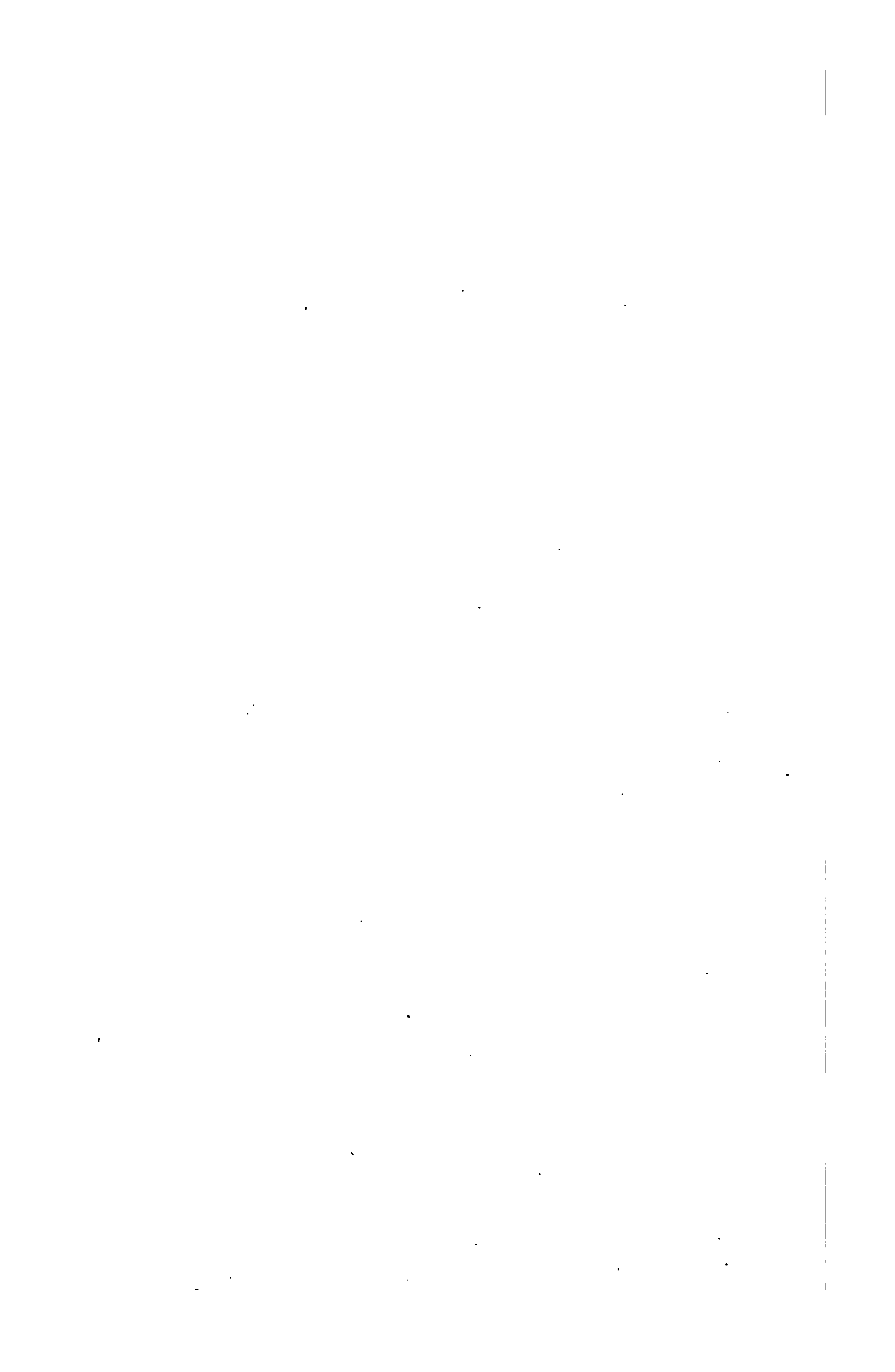
Indem ich so Einiges von dem Folgenden für mich in Anspruch nehme, wäre es meine Pflicht gewesen, das, was von Anderen herrührt, gehörig ersichtlich zu machen: allein ich hätte zu oft die Namen Miller und Naumann wiederholen müssen, wenn diess auch gezeigt hätte, wie sehr ich mich bemühte, auf den Grundlagen jener Forscher weiter zu bauen.

INHALT.

LEHRBUCH

DER

KRYSTALLOGRAPHIE.



1. Kapitel.

Geometrische Einleitung.

§. 1. Krystalle.

Chemische Verbindungen treten oft sowohl bei ihrem Vorkommen in der Natur, als auch bei ihrer von Menschenhand eingeleiteten Entstehung in Formen auf, die von ebenen Flächen begrenzt sind. Solche Körper nennen wir Krystalle. Wir finden, dass die ebenen Flächen derselben gewissen Gesetzen unterworfen sind, deren Erörterung der Zweck dieses Buches ist. Aber durch diese Gesetze allein wären wir noch nicht im Stande, jedesmal einen mit künstlichen ebenen Flächen versehenen Körper von einem wirklichen Krystalle zu unterscheiden oder die wahre Natur einer krystallisirten Substanz zu erkennen, deren ebenflächige Begrenzung durch äussere Mittel hinweggenommen wurde. Diess gelingt vielmehr unzweifelhaft erst durch die Betrachtung der physikalischen Eigenschaften, deren Gleichheit und Ungleichheit nach bestimmten Richtungen charakteristische Kennzeichen der Krystalle bilden. Die physikalischen Verhältnisse der Krystalle können wir jedoch hier nur vorübergehend berühren.

Eine erste Betrachtung von Krystallen zeigt schon, dass die Flächen der letzteren meist so um einen Punkt im Raume angeordnet sind, dass keine einspringenden Winkel entstehen. Der gegenseitige Abstand der Flächen erscheint hiebei als vollkommen zufällig und keinem Gesetze unterworfen. Wir finden nämlich Krystalle einer und derselben Substanz, welche, was die Anzahl und die Neigungen ihrer Flächen zu einander betrifft, vollkommen übereinstimmen, aber doch die grösste Unähnlichkeit zeigen, sobald man die Ausdehnung der einzelnen Flächen ins Auge fasst. Es zeigt sich so, dass nur die Richtung der Krystall-

flächen unveränderlich ist, wenigstens insolange sich die Temperatur der Krystalle nicht ändert, während die absolute Lage der Flächen zufällig ist. Die Gesetze der Krystallographie können sich daher auch nur auf die relative Lage der Flächen beziehen; diese Gesetze lassen sich aber hauptsächlich in zwei Sätze zusammenfassen, die wir als die beiden Hauptgesetze der Krystallographie kennen lernen werden.

Um die Beziehungen zwischen den Flächen eines Krystalles in ihrer einfachsten Form geben zu können, werden wir die Flächen nicht durch die Neigungen, die sie gegenseitig machen, bestimmen, sondern durch andere Grössen, nämlich durch die Abschnitte, welche sie auf drei durch einen Punkt des Raumes gehende Linien machen. Es ist klar, dass, soll die letztere Bestimmungsweise der Flächen vollständig und richtig sein, aus den Daten derselben die Neigungen der Flächen nothwendig folgen und sich daher auch daraus berechnen lassen müssen, ebenso, wie auch die Umkehrung dieses Problems möglich sein muss. Diese beiden Aufgaben bilden den Gegenstand der rechnenden Krystallographie, die wir in einem der letzteren Kapitel behandeln werden. Die dort zu lösenden Probleme sind jedoch zur Erkenntnis der Gesetze der Krystallographie im Allgemeinen nicht nothwendig, sind aber dann von grosser Wichtigkeit, wenn es sich darum handelt, an einem bestimmten Krystalle die Beziehungen seiner Flächen unter einander aufzufinden, oder die Identität eines Krystalles durch Ermittelung seiner krystallographischen Konstanten festzustellen u. s. f.

Wir wollen also vorerst, ohne Bezug auf Krystallflächen zu nehmen, die Bestimmung der Lage von Ebenen durch die Abschnitte dieser Ebenen auf drei Linien ins Auge fassen.

§. 2. Betrachtung eines Systems dreier Axen.

Um die Lage der Ebenen, die einen Körper begrenzen, zu bestimmen, denken wir uns durch einen Punkt im Innern des Körpers drei Linien gezogen, welche nicht in einer Ebene liegen, und welche gegen den Körper und daher auch gegen einander eine unveränderliche Richtung haben. Diese drei Linien werden jede Begrenzungsebene in drei Punkten schneiden, wenn man sich nur sowohl die Linien als auch die Ebenen gehörig vergrössert denkt. Letztere drei Punkte werden uns nun dazu dienen können, die Lage der Ebene zu fixiren, denn durch drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, kann nur eine einzige Ebene gelegt werden; zwei Punkte wären zu wenig, indem diese nur ihre Verbindungslinie bestimmen.

XX', YY', ZZ' seien drei durch den Punkt O des betrachteten Körpers gelegte Linien (Fig. 1), auf welche die Begrenzungsebenen desselben bezogen werden sollen. Man bezeichnet diese Linien der Reihe nach als die X, Y und Z Axe des Körpers; ihre Lage gegen einander ist gegeben durch die Axenwinkel YOZ, ZOX, XOY. Den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt O der drei Axen nennt man den Axenmittelpunkt, und die Ebenen, welche durch je zwei der drei Axen gehen, die Axenebenen; die Axen sind daher die Durchschnittslinien der Axenebenen. Durch letztere wird der Raum um den Punkt O herum in acht Theile getheilt, nämlich in die acht Raumtheile:

$OXYZ$ $\quad OX'Y'Z'$
$OXYZ'$ $\quad OX'Y'Z$
$OX'YZ'$ $\quad OXY'Z$
$OX'YZ$ $\quad OXY'Z'$

welche man mit dem Namen Oktanten bezeichnet. Und zwar nennt man Oktanten, die auf entgegengesetzten Seiten einer Axenebene, aber auf derselben Seite der beiden anderen Axenebenen liegen, wie z. B. $OXYZ$ und $OXYZ'$ anliegende, solche, die auf entgegengesetzten Seiten von zwei Axenebenen liegen, wie $OXYZ$ und $OX'YZ'$ gegenüberliegende, und endlich diejenigen, die mit Bezug auf jede der Axenebenen auf verschiedenen Seiten derselben liegen, wie $OXYZ$ und $OX'Y'Z'$, entgegengesetzte Oktanten.

Irgend eine Ebene E des betrachteten Körpers schneide nun gehörig vergrössert die drei Axen der Reihe nach in den Punkten H, K, L; die Abschnitte OH, OK, OL heissen alsdann die Parameter der Ebene E. Durch diese drei Abschnitte, welche wir uns mit einer bestimmten Längeneinheit gemessen denken, ist aber die Lage der Punkte H, K, L und somit auch die Lage der betrachteten Ebene E bestimmt. Die Linien KL, LH, HK sind ersichtlich die Durchschnittslinien der Ebene E mit den drei Axenebenen; denn es liegen z. B. die beiden Punkte K und L sowohl in der Ebene E, als auch in der Axenebene YZ, gehören also beiden Ebenen an und können somit nur in der Durchschnittslinie derselben liegen. Da aber zwei Ebenen sich in einer geraden Linie schneiden und eine Gerade durch zwei Punkte in derselben gegeben ist, so ist KL wirklich die Durchschnittslinie der beiden genannten Ebenen.

Das Dreieck HKL dagegen ist die Durchschnittsfigur der betrachteten Ebene E mit dem Oktanten $OXYZ$. Man sieht ferner, dass die anliegenden Oktanten $OX'YZ$, $OXY'Z$, $OXYZ'$ von der

Ebene E zwar ebenfalls, aber in keiner geschlossenen Figur geschnitten werden. Man sagt im Allgemeinen von einer Ebene, dass sie in demjenigen Oktanten liege, welchen sie in einer geschlossenen Figur (Dreieck) schneidet, obwohl natürlich jede Ebene gehörig erweitert auch theilweise in die anliegenden Oktanten zu liegen kommt.

Indem wir die Länge der Parameter einer Ebene längs jeder Axe vom Mittelpunkte derselben rechnen, haben wir, um Zweideutigkeit zu vermeiden, noch anzugeben, nach welcher Seite vom Mittelpunkte aus die Parameter auf den betreffenden Axen aufgetragen werden sollen. Man bezeichnet zu diesem Zwecke die eine Hälfte jeder Axe (OX, OY, OZ) als positive, die andere (OX', OY', OZ') dagegen als negative Halbaxe, und versieht dem entsprechend die Parameter einer Ebene mit dem Zeichen + oder —, je nachdem sie auf der positiven oder negativen Hälfte einer Axe aufgetragen werden sollen. Das Zeichen + wird jedoch gewöhnlich weggelassen und jeder Parameter ohne Vorzeichen als positiv angenommen.

Mit Berücksichtigung der Zeichen sind daher für die drei Parameter folgende acht Fälle möglich:

$$\begin{array}{lll} OH, & OK, & OL \\ OH, & OK, & -OL \\ -OH, & OK, & -OL \\ -OH, & OK, & OL \end{array} \qquad \begin{array}{lll} -OH, & -OK, & -OL \\ -OH, & -OK, & OL \\ OH, & -OK, & OL \\ OH, & -OK, & -OL \end{array}$$

wobei sich der erste Parameter immer auf die XAxe, der zweite auf die YAxe und der dritte auf die ZAxe bezieht. Jedem dieser Fälle entspricht eine Ebene, und man überzeugt sich leicht, dass jede derselben in einem anderen der acht Oktanten liegt, so dass auf jeden Oktanten eine Ebene entfällt.

Schneidet man in Fig. 1 auf den drei Axen zu beiden Seiten des Mittelpunktes beziehungsweise die Längen OH, OK, OL ab, wodurch man die Punkte H, K, L und H', K', L' erhält, so werden die Dreiecke

$$\begin{array}{ll} HKL & H'K'L' \\ HKL' & H'K'L \\ H'KL' & HK'L \\ H'KL & HK'L' \end{array}$$

offenbar die Durchschnitte der obigen Flächen mit den Oktanten sein, in welchen sie liegen. Man nennt einen Komplex von solchen acht Ebenen, deren Parameter sich nur durch die Vorzeichen unterscheiden, ein Oktaid, da in dem speziellen Falle auf einander senkrechter Axen

und gleich langer Parameter ein von solchen Ebenen begrenzter Körper offenbar ein reguläres Oktaeder wird. In dem Oktaide sind je zwei Ebenen, die in entgegengesetzten Oktanten liegen, deren Parameter also stückweise die entgegengesetzten Zeichen haben, einander parallel, wie wir sogleich zeigen werden. Die parallelen Ebenen sind in obiger Aufzählung neben einander gestellt.

Multipliziren wir nämlich die drei Parameter OH, OK, OL einer Ebene E mit der beliebigen Grösse m, so dass wir haben

$$OH_1 = mOH \quad OK_1 = mOK \quad OL_1 = mOL$$

und betrachten wir OH_1, OK_1, OL_1 als die Parameter einer neuen Ebene E_1, so muss diese Ebene parallel der ursprünglichen Ebene E sein. Denn sind in Fig. 1 die Dreiecke HKL und $H_1K_1L_1$ die Durchschnitte der beiden Ebenen mit dem Oktanten $OXYZ$, so hat man der Annahme zufolge

$$\frac{OH_1}{OH} = \frac{OK_1}{OK} = \frac{OL_1}{OL} = m$$

und somit

$$\begin{aligned} \Delta\, KOL &\sim \Delta\, K_1OL_1 \\ \Delta\, LOH &\sim \Delta\, L_1OH_1 \\ \Delta\, HOK &\sim \Delta\, H_1OK_1 \end{aligned}$$

woraus sogleich

$$KL \parallel K_1L_1 \quad LH \parallel L_1H_1 \quad HK \parallel H_1K_1$$

folgt, und es müssen daher auch die durch diese parallele Linien gehenden Ebenen E und E_1 einander parallel sein.

Die Multiplikation oder Division der drei Parameter einer Ebene mit irgend einer Grösse hat also nur den Effekt, die Ebene parallel zu sich selbst zu verschieben. Da durch eine solche Verschiebung die Neigung dieser Ebene zu den anderen Ebenen des betrachteten Körpers nicht geändert wird, so kann man immer die drei Parameter einer Ebene mit einer beliebigen Zahl multipliziren oder dividiren, indem es uns ja bei der Betrachtung der Krystalle nur auf die gegenseitige Neigung ihrer Flächen, nicht aber auf die absolute oder relative Grösse derselben ankommt. Einem der Parameter einer Ebene kann man daher immer einen beliebigen Werth ertheilen, man kann denselben auch gleich Eins machen, indem man durch den betreffenden Parameter alle drei dividirt. Drei Parameter stellen daher auch nur zwei unabhängige Grössen dar, und wir sehen, dass eine Ebene auch auf diese Weise schon durch zwei Grössen bestimmt wird, gerade wie zwei Winkel, welche die Ebene mit

anderen Ebenen macht, genügen, um die Lage dieser Ebene ihrer Richtung nach zu fixiren.

Es ist somit auch bewiesen, dass zwei Ebenen, deren Parameter stückweise das entgegengesetzte Zeichen haben, parallel sind, indem ja die Parameter der einen Ebene durch Multiplikation mit -1 in die der anderen übergehen.

Wird von den drei Parametern OH, OK, OL der Ebene E einer, z. B. OL, unendlich, so bedeutet diess, dass die Ebene E parallel der ZAxe ist, indem diese Axe von der Ebene erst in unendlicher Entfernung getroffen wird; aus letzterem Grunde werden in diesem Falle auch die Durchschnittlinien der Ebene E mit der Axenebene XZ und YZ parallel der ZAxe sein müssen. Die Ebene E ist aber für $OL = \infty$ sowohl der positiven als negativen Hälfte der ZAxe parallel, und es ist somit gleichgültig, ob man einem unendlich grossen Parameter das Zeichen $+$ oder $-$ vorsetzt. Es gehen daher auch zwei Ebenen, die sich nur durch das Vorzeichen eines Parameters unterscheiden, in eine einzige über, sobald dieser Parameter unendlich wird. Von den acht Ebenen des zu E gehörigen Oktaides werden daher für $OL = \infty$ je zwei zusammenfallen müssen, wodurch wir bloss 4 Ebenen mit den Parametern

$$OH,\ OK,\ \infty \qquad -OH,\ -OK,\ \infty$$
$$-OH,\ OK,\ \infty \qquad OH,\ -OK,\ \infty$$

erhalten. Diese Ebenen sind alle der ZAxe und zu zweien einander parallel, sie bilden zusammen ein vierseitiges Prisma, dessen Ebenen die Axenebene XY in denselben Linien schneiden, wie die Ebenen des ursprünglichen Oktaides, man nennt daher auch ein solches Prisma ein zu dem Oktaide gehöriges.

Aehnliche Körper erhält man aus dem zur Ebene E gehörigen Oktaide, indem einer der beiden anderen Parameter OH und OK unendlich gross wird. Den Inbegriff der Ebenen dieser Körper nennt man zum Unterschiede von dem früheren Falle ein Doma. Setzt man $OH = \infty$, so hat man ein Doma, dessen vier Ebenen parallel der XAxe sind; setzt man dagegen $OK = \infty$, so werden die Ebenen des Doma parallel der YAxe. Die beiden Domen schneiden beziehungsweise die YZ und XZEbene in denselben Linien, wie das ursprüngliche Oktaid, und werden daher auch zu diesem Oktaide gehörige Domen genannt.

Den Komplex von Ebenen, der aus den zu einem Oktaide gehörigen Domen und Prismen besteht, bezeichnet man als ein Dodekaid. Geht nämlich das Oktaid in das reguläre Oktaeder über, so entsprechen die Flächen des zugehörigen Dodekaides ebenfalls den Flächen des re-

gulären Dodekaeders der Stereometrie, wovon wir uns später noch genauer überzeugen werden.

Werden zwei der drei Parameter einer Ebene unendlich, so erhalten wir eine Ebene, welche parallel zweien Axen und daher auch parallel der betreffenden Axenebene ist. Da es auch hier gleichgültig ist, ob man das Zeichen „unendlich" positiv oder negativ nimmt, so gehen von den acht Flächen des Oktaides für $OH = OL = \infty$ die im obigen Schema unter einander stehenden vier Ebenen in je eine einzige über, und man hat also in diesem Falle nur zwei Ebenen mit den Parametern

$$\infty, 1, \infty \text{ und } \infty, -1, \infty$$

in welcher Form sie durch die gestattete Division mit OK erhalten werden. Diese beiden Ebenen sind parallel der X und ZAxe und folglich auch parallel der Axenebene XZ, und man kann daher auch sagen, dass $\infty, 1, \infty$ oder $\infty, -1, \infty$, die Parameter dieser Axenebene selbst sind. Die beiden parallelen Ebenen zusammen nennt man ein Pinakoid. Ebenso erhält man für $OK = OL = \infty$ ein Pinakoid parallel der Axenebene YZ und für $OH = OK = \infty$ ein zur Axenebene XY paralleles. Die Parameter der Axenebenen YZ und XY sind daher $\infty, \infty, 1$ und $1, \infty, \infty$.

Man nennt den Inbegriff der Ebenen der drei Pinakoide ein Hexaid, indem diese Ebenen für ein rechtwinkeliges Axensystem das reguläre Hexaeder bilden, falls sie alle gleich weit vom Axenmittelpunkte entfernt sind. Die Ebenen des Hexaides schneiden sich natürlich, da sie parallel den Axenebenen sind, in Linien, die ihrerseits parallel zu den Axen gerichtet sind.

§. 3. Richtung der Durchschnittslinie zweier Ebenen.

Wir haben im Vorhergehenden die Richtung der Durchschnittslinie von Ebenen kennen gelernt, deren Parameter sich nur durch die Vorzeichen unterscheiden; es ist nun allgemein die Durchschnittslinie zweier Ebenen mit ungleichen Parametern zu bestimmen. Zwar ist jede Linie schon bestimmt, wenn man zwei Ebenen angibt, die durch dieselbe hindurch gehen, allein, wenn wir die Lage einer Linie gerade so durch Punkte derselben bestimmen, wie wir diess bei den Ebenen gethan, so tritt uns die Aufgabe entgegen, die Bestimmungsstücke der Linien durch die Bestimmungsstücke derjenigen Ebenen auszudrücken, durch deren Durchschnitt die Linie gebildet ist.

Sind OH, OK, OL die Parameter einer Ebene P, OH', OK', OL' die einer zweiten Ebene P', so wird, wenn man sich die Durch-

schnitte von P und P' mit den Axenebenen zeichnet (Fig. 2), die Linie KL der ersten Ebene mit der Linie $K'L'$ der zweiten sich wirklich in einem Punkte α im Raume schneiden müssen, da diese beiden Linien in einer und derselben Ebene, nämlich in der Axenebene YZ liegen. Der Punkt α wird aber als Durchschnittspunkt von KL und $K'L'$ sowohl in der Ebene P als auch in P' liegen müssen, er wird daher offenbar ein Punkt der Durchschnittslinie beider Flächen sein. Dasselbe gilt aber von den Punkten β und γ, den Durchschnitten der Linien LH mit $L'H'$ und HK mit $H'K'$. Da sich aber zwei Ebenen in einer geraden Linie schneiden, so folgt hieraus, dass die Punkte α, β, γ, welche alle drei der Durchschnittslinie der Ebenen P und P' angehören, in einer und derselben Geraden liegen müssen. Es ist also schon durch zwei dieser drei Punkte die Durchschnittslinie gegeben.

Sollen die Ebenen P und P', wie es bei an einander stossenden Krystallflächen der Fall ist, den Mittelpunkt so umschliessen, dass keine einspringenden Winkel entstehen, so werden offenbar nur die in Fig. 2 stärker gezogenen Theile der beiden Ebenen auftreten können. Die beiden Ebenen bilden an ihrer Durchschnittslinie ersichtlich zwei Neigungswinkel, die sich gegenseitig zu 180^0 ergänzen. Wir nennen denjenigen dieser zwei Winkel, innerhalb welchem der Punkt O liegt, den innern, den anderen aber den äussern Neigungswinkel der beiden Ebenen.

Verschiebt man eine oder beide der Ebenen P und P' parallel zu sich selbst, so kann hiedurch die Richtung der Durchschnittslinie nicht geändert werden, da ja parallele Ebenen sich immer in parallelen Linien schneiden. Wir wollen nun die Ebene P' so parallel zu sich selbst verschieben, dass sie die Z Axe in demselben Punkte trifft, wie die Ebene P, dass also ihr dritter Parameter gleich OL wird. Um aber die Parameter OE, OF, OL der Ebene P' in dieser neuen Lage zu finden, brauchen wir ersichtlich ihre ursprünglichen Parameter nur mit $\frac{OL}{OL'}$ zu multipliciren, und haben also

$$OE = \frac{OL}{OL'}\, OH', \qquad OF = \frac{OL}{OL'}\, OK', \qquad OL. \quad . \; . \; . \; (1)$$

Zeichnet man nun für die neue Lage von P' wieder die Durchschnitte der Ebenen P und P' mit den Axenebenen (Fig. 3), so sieht man, dass diese Linien sich nicht mehr wie früher in drei Punkten wechselweise schneiden, sondern bloss in zweien, da zwei der drei Punkte, α und β nämlich, in den Punkt L zusammenfallen. HK und EF schneiden sich aber in einem Punkte D, der dem früheren Punkte γ entspricht.

Die Linie DL ist somit jetzt die Durchschnittslinie der beiden Ebenen P und P' und muss natürlich gegen die Axen dieselbe Richtung haben wie früher. Nur wird die Bestimmung der Punkte der Durchschnittslinie in diesem Falle einfacher, da einer derselben in der ZAxe liegt und sogleich durch den Parameter OL gegeben ist. Um aber auch den zweiten Punkt D der Durchschnittslinie zu bestimmen, brauchen wir offenbar nur die Längen der Linien UO und VO zu ermitteln, wenn U und V solche Punkte der X und YAxe sind, für welche

$$UD \parallel OY, \quad VD \parallel OX$$

Die Aufgabe ist nun, die Stücke UO und VO, welche man die Koordinaten des Punktes D nennt, durch die Parameter der Ebenen P und P' auszudrücken.

Es ist zufolge des Parallelismus der betreffenden Linien

$$\begin{array}{l} \triangle\, OKH \sim \triangle\, UDH \\ \triangle\, OFE \sim \triangle\, UDE \end{array}$$

und es verhält sich daher

$$\begin{array}{l} OK : UD = OH : UH = OH : (OH - OU) \\ OF : UD = OE : UE = OE : (OE - OU) \end{array}$$

Aus diesen Proportionen erhält man

$$OU = OH \,.\, OE \,.\, \frac{OK - OF}{OE \,.\, OK - OF \,.\, OH}$$

$$UD = OV = OK \,.\, OF \,\frac{OE - OH}{OE \,.\, OK - OF \,.\, OH}$$

Setzt man hierin für OE und OF die Werthe aus den Gleichungen (1), so erhält man zur Bestimmung der Lage des Punktes D die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} OU = \dfrac{OH \,.\, OH'}{OL'} \,.\, \dfrac{OK \,.\, OL' - OL \,.\, OK'}{OK \,.\, OH' - OH \,.\, OK'} \\[2ex] OV = \dfrac{OK \,.\, OK'}{OL'} \,.\, \dfrac{OL \,.\, OH' - OH \,.\, OL'}{OK \,.\, OH' - OH \,.\, OK'} \end{array}\right\} \quad . \; . \; (2)$$

womit unsere Aufgabe gelöst ist.

Um aber die drei Bestimmungsstücke OU, OV, OL der Durchschnittslinie symmetrisch zu machen, d. h. alle auf eine mathematisch ähnliche Form zu bringen, tragen wir auf der ZAxe vom Mittelpunkte O aus die Linie OL nach der entgegengesetzten Richtung auf, so dass wir haben

$$OW = -\, OL \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Ziehen wir dann die Parallelen

$$UR \parallel VS \parallel OW \parallel DQ$$
$$UD \parallel VO \parallel WS \parallel QR$$
$$UO \parallel VD \parallel WR \parallel QS$$

so erhalten wir durch die Kreuzungspunkte dieser Linien ein Parallelopiped $UVDOSWQR$, dessen Diagonale OQ parallel sein wird der Linie LD, da ja zufolge der Konstruktion OL parallel und gleichlang mit QD und daher das Viereck $OQDL$ ein Parallelogramm sein muss. Wir können also auch OQ als Durchschnittslinie der beiden Ebenen P und P' auffassen, da es uns ja bloss auf die Richtung derselben ankommt. Die Durchschnittslinie ist alsdann die Verbindungslinie des Axenmittelpunktes mit dem Punkte Q, dessen Lage leicht durch die drei Koordinaten desselben OU, OV, OW gefunden werden kann.

Multiplizirt man die Parameter der Ebene P mit einer beliebigen Grösse m, so kann hiedurch die Richtung der Durchschnittslinie nicht geändert werden. Nennen wir also die neuen Werthe der Grössen OU, OV, OW etwa OU', OV', OW', so wird der durch letztere Koordinaten gegebene Punkt ebenfalls ein Punkt der Linie OQ sein müssen. Die Gleichungen (2) und (3) lehren aber, dass

$$OU' = m \,.\, OU, \qquad OV' = m \,.\, OV, \qquad OW' = m \,.\, OW$$

ist, woraus hervorgeht, dass man die Grössen OU, OV, OW mit einem beliebigen Ausdruck multipliziren oder dividiren kann, ohne dass hiedurch die Richtung der Durchschnittslinie geändert würde.

Multipliziren wir die Koordinaten des Punktes Q etwa mit

$$\frac{OH \,.\, OK' - OK \,.\, OH'}{OH \,.\, OH' \,.\, OK \,.\, OK' \,.\, OL}$$

so erhält man zufolge der Gleichungen (2) und (3)

$$\left.\begin{aligned} OU &= \frac{1}{OK \,.\, OL'} - \frac{1}{OL \,.\, OK'} \\ OV &= \frac{1}{OL \,.\, OH'} - \frac{1}{OH \,.\, OL'} \\ OW &= \frac{1}{OH \,.\, OK'} - \frac{1}{OK \,.\, OH'} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (4)$$

welche Gleichungen nunmehr vollkommen symmetrisch sind. Wir werden daher auch immer, wenn es nur darauf ankommt, die Richtung der Durchschnittslinie zweier Ebenen zu fixiren, uns dieselbe durch den Axenmittelpunkt gehend denken und die Koordinaten eines Punktes

derselben in dieser Lage angeben. Diese Koordinaten sind natürlich je nach ihrem Vorzeichen auf den positiven oder negativen Hälften der Axen aufzutragen.

§. 4. Tautozonale Ebenen.

Je zwei Ebenen P, Q sind einer und derselben Linie im Raume parallel, nämlich jeder Linie, die dieselbe Richtung wie die Durchschnittslinie dieser beiden Ebenen hat. Wir haben im vorhergehenden Paragraphe gesehen, wie man diese Richtung mit Hilfe der Parameter der beiden Ebenen finden könne. Soll eine dritte Ebene R ebenfalls parallel dieser Linie sein, so wird, damit diess stattfindet, eine gewisse Bedingung durch die Parameter dieser Ebene erfüllt sein müssen. Aber auch nur eine einzige Bedingung, denn hätten wir für die Parameter einer Ebene auch nur zwei Bedingungen, so wäre diese Ebene schon vollkommen ihrer Richtung nach gegeben, da ja die Parameter einer Ebene nur zwei variable Grössen vorstellen. Von der Ebene R nehmen wir jedoch an, dass sie zwar parallel einer gewissen Linie sei, um diese herum aber jede beliebige Lage haben könne, es darf also für die Parameter dieser Ebene nur eine einzige Bedingungsgleichung bestehen. Die Entwickelung dieser Gleichung wollen wir jedoch auf einen späteren Moment verschieben. Hier bemerken wir nur, dass man solche Ebenen, die einer und derselben Linie im Raume parallel sind, tautozonale nennt oder von ihnen sagt, dass sie in einer Zone liegen. Die Linie, der diese Ebenen parallel sind, nennt man die Zonenaxe; natürlich stellt diese Axe, die man sich gewöhnlich durch den Axenmittelpunkt gelegt denkt, auch nur eine blosse Richtung vor. Wir bezeichnen die Richtung einer Zonenaxe durch das Symbol $[PQ]$, wo P und Q zwei Ebenen in der betreffenden Zone sind.

Eine bald zu entwickelnde wichtige Eigenschaft tautozonaler Ebenen führt uns dahin, die Verhältnisse der Linien näher ins Auge zu fassen, welche von einem Punkte innerhalb eines von mehreren Ebenen umschlossenen Raumes senkrecht zu dieser Ebene gezogen werden. Wir bezeichnen diese Linien kurz als die Normalen der Ebenen und nehmen gewöhnlich an, dass sie vom Axenmittelpunkte aus gezogen wurden. Es ist klar, dass, wenn wir die Lage der Normale einer Ebene kennen, uns damit auch die Lage der Ebene selbst ihrer Richtung nach gegeben ist. Senkrecht zu einer und derselben Linie können nämlich nur Ebenen sein, die alle unter sich parallel sind.

Die Normalen zweier Ebenen haben aber auch ferner die wichtige Eigenschaft, dass der Winkel zwischen den Normalen zweier Ebenen

gleich dem Supplemente des innern Neigungswinkel dieser zwei Ebenen ist, dass sich also der Normalen- und der Neigungswinkel zweier Ebenen gegenseitig zu 180⁰ ergänzen. Es ist diess leicht zu beweisen. Denn da die Normale zu einer Ebene senkrecht steht auf jeder in dieser Ebene durch ihren Fusspunkt gezogenen Linie, so muss (Fig. 4), wenn ON und ON' zwei vom Punkte O im Inneren des umschlossenen Raumes auf die Ebenen P und P' gefällte Senkrechte, HK und $H'K'$ aber die Durchschnitte dieser Flächen mit der Ebene NON' sind, offenbar

$$HLO = H'L'O = 90^0$$

sein, wenn noch L und L' die Kreuzungspunkte der Linien HK und $H'K'$ mit ON und $O'N'$ sind. Die beiden Ebenen P und P' werden sich nun in einer Linie schneiden, welche offenbar die Ebene NON' im Punkte M trifft, wo M in der Verlängerung von HK und $H'K'$ liegt. Denken wir uns nun die beiden Normalen ON und ON' in ihrer Ebene parallel so verschoben, dass sie durch den Punkt M gehen, wodurch sie aber noch immer senkrecht zu beiden Ebenen bleiben, so muss offenbar der Winkel, welchen die Durchschnittslinie von P und P' mit jeder der verschobenen Normalen bildet, ein rechter sein. Ist eine Linie aber senkrecht zu zwei anderen, so ist sie auch senkrecht zur Ebene dieser Linien; es ist somit die Durchschnittslinie PP' senkrecht auf der Ebene der verschobenen Normalen, letztere Ebene ist aber mit der Ebene der ursprünglichen Normalen identisch, und wir können somit sagen: Fällt man von einem und demselben Punkte Normalen auf zwei Ebenen, so ist die Durchschnittslinie dieser zwei Ebenen senkrecht zur Ebene der Normalen.

Ist nun die Durchschnittslinie PP senkrecht zur Ebene NON', so ist sie auch senkrecht zu den Linien MH und MH', welche in der letzteren Ebene liegen, der Winkel HMH' ist somit das, was wir den inneren Neigungswinkel zweier Ebenen nennen. Aus dem Vierecke $MLOL'$ nun, in welchem

$$MLO = ML'O = 90^0$$

ergibt sich sogleich, was zu beweisen war

$$HMH' + NON' = 180^0$$

Wir können nun auch den angedeuteten Satz in Betreff tautozonaler Ebenen leicht beweisen. Derselbe lautet:

„Die von einem Punkte auf Ebenen einer und derselben Zone gefällten Normalen liegen in einer und derselben zur Axe dieser Zone senkrechten Ebene.“

Wir haben nämlich gerade gesehen, dass die Durchschnittslinie zweier Ebenen senkrecht zur Ebene ihrer Normalen ist; nun sind die Durchschnittslinien je zweier Ebenen einer Zone alle unter sich und der Zonenaxe parallel. Es müssen also die durch die Normalen je zweier Ebenen dieser Zone gelegten Ebenen senkrecht stehen auf einer und derselben Linie, aber auch durch ein und denselben Punkt im Raume gehen, nämlich durch denjenigen, von dem aus die Normalen gefällt wurden. Diess ist aber nur möglich, wenn alle Normalen in einer und derselben Ebene liegen, welche senkrecht zur Axe der betrachteten Zone ist.

§. 5. Beziehungen zwischen den Kanten und Normalen dreier Ebenen.

In Fig. 5 seien FH, FK, FL die Durchschnittslinien oder kurz die Kanten dreier Ebenen, OP, OQ, OR aber die vom Punkte O auf diese drei Ebenen gefällten Normalen, so dass also

$$OP \perp pl\, KFL, \quad OQ \perp pl\, LOH, \quad OR \perp pl\, HFK$$

Da nun, wie wir im vorhergehenden Paragraphe gesehen haben, für je zwei Ebenen die Durchschnittslinie senkrecht sein muss zur Ebene ihrer Normalen, so haben wir auch

$$FH \perp pl\, QOR, \quad FK \perp pl\, ROP, \quad FL \perp pl\, POQ$$

Die Normalen sind aber die Durchschnittslinien der drei Ebenen QOR, ROP, POQ, auf welchen zufolge der letzten Relationen die ursprünglichen Kanten senkrecht stehen. Diess gibt uns folgenden Satz:

„Die drei Ebenen, welche durch die Normalen dreier anderer Ebenen gehen, haben zu Kantenwinkeln die Winkel der Normalen, zu Normalenwinkeln aber die Kantenwinkel der letzteren drei Ebenen."

Hieraus folgt aber auch sogleich der Satz:

„Jede Relation zwischen beliebig vielen der Kanten- und Normalenwinkel dreier Ebenen bleibt auch noch richtig, wenn man in derselben gleichzeitig die Kantenwinkel durch die Winkel der Normalen und die Normalenwinkel durch die Winkel der Kanten ersetzt."

Denn was z. B. für die drei beliebigen Ebenen KFL, LFH, HFK gilt, muss ja auch von den drei Ebenen QOR, ROP, POQ gelten; letztere unterscheiden sich aber von den ersteren nur durch die Vertauschung der Kanten- und Normalenwinkel.

„Ist eine der Kanten, in denen sich drei Ebenen schneiden, senkrecht zu den beiden andern, so stehen auch die beiden Ebenen, welche die erstere Kante bilden, senkrecht auf der dritten Ebene und umgekehrt."

Ist nämlich in Fig. 5 z. B. *FK* senkrecht zu *FH* und *FL*, so ist *FK* senkrecht zur Ebene *HFL* und somit parallel der Normale *OQ* dieser Ebene; anderseits muss in Folge dessen auch die Ebene *HFL* parallel zur Ebene *POR* sein, somit *OQ* auch senkrecht stehen zur Ebene *POR*, was zu beweisen war. Die Umkehrung lässt sich ebenso beweisen, folgt aber auch schon aus dem Gesagten durch die nach dem früheren Satze gestattete Vertauschung der Winkel. Unmittelbar aus dem eben bewiesenen Satze ergibt sich noch der folgende:

„Sind die Kanten dreier Ebenen wechselweise auf einander senkrecht, so sind es auch die Ebenen, und umgekehrt.“

§. 6. Pole der Ebenen.

Um die Verhältnisse der von ebenen Flächen begrenzten Krystalle zu studiren und um die Vorstellung bei Ableitung der zwischen diesen Ebenen bestehenden Beziehungen zu unterstützen, entwirft man sich meist perspektivische Zeichnungen der Krystalle, in welchen jede Kante durch eine entsprechende Linie repräsentirt ist. Wir werden in dem Kapitel, das von der Zeichnung der Krystalle handelt, sehen wie man diese Linien richtig zu zeichnen habe, d. h. so, dass sie gegeneinander dieselbe Lage haben, in welcher das Auge die Kanten des zu zeichnenden Krystalles sieht. Je mehr Flächen an einem Krystalle vorkommen, desto verwickelter wird offenbar die Zeichnung desselben und ist alsdann von geringerem Nutzen, falls sie nicht ziemlich genau ausgeführt wurde. Zu dem sind es bei den Krystallen weniger die Umrisse und die Gestalt ihrer Flächen als die Neigung der Flächen zu einander, und deren Anordnung, welche hauptsächlich unser Interesse erregen.

Es empfiehlt sich daher, anstatt die Umrisse der Flächen eines Krystalles zu zeichnen, jede Fläche nur durch eine einzige gerade oder krumme Linie zu repräsentiren, natürlich muss dann diese Linie eine solche sein, welche wirklich die Lage der Flächen vollkommen bestimmt. Solche Linien (und zwar gerade) erhält man z. B., wenn man die Flächen eines Krystalles durch ein und denselben Punkt *O* im Raume gehen lässt und sie dann alle durch eine beliebige Ebene *S* schneidet. Jede der Krystallflächen wird die Ebene *S* in einer Geraden schneiden, welche für diese Fläche charakteristisch ist, indem man mit Hilfe dieser Linie und der gegebenen Lage von *O* und *S* immer die Lage der betreffenden Krystallfläche wird bestimmen können.

Hierauf beruht Quenstedt's Linear-Projektion, bei welcher blos die Durchschnittslinien (Sektionslinien) gezeichnet werden, welche eine Ebene (Reduktionsebene, gewöhnlich die Axenebene *XY*) mit den

Flächen des betreffenden Krystalles bildet, falls dieselben so verschoben sind, dass sie alle die ZAxe in einer und derselben Entfernung vom Axenmittelpunkte schneiden.

Noch zweckmässiger ist es aber die Flächen eines Krystalles durch die Normalen zu repräsentiren, welche von einem und demselben Punkte auf diese Flächen gefällt wurden. Wir haben ja im §. 4 gesehen, dass diese Normalen die Lage der Flächen vollkommen bestimmen, und durch die Winkel, die sie unter einander bilden, zugleich die Supplemente der inneren Neigungswinkel dieser Flächen geben.

Man braucht aber nicht einmal, um die Lage der Krystallflächen auf diese Weise zu fixiren, die Normalen wirklich zu zeichnen, denn es genügt hiezu schon die Kenntnis eines einzigen Punktes jeder Normale, falls der Punkt O, von dem aus die Normalen gefällt wurden, gegeben ist: jede Linie ist ja durch zwei ihrer Punkte vollkommen bestimmt. Zu den Punkten aber, welche die Normalen und somit auch die Krystallflächen selbst repräsentiren, werden am zweckmässigsten solche gewählt, die auf den einzelnen Normalen gleichweit von dem Punkte O abstehen.

Diese Punkte, welche man die Pole der Flächen nennt, werden daher alle auf der Oberfläche einer Kugel liegen, deren Zentrum eben der Punkt O ist, von dem aus die Normalen auf die Flächen gefällt wurden. Diese Kugeloberfläche, deren Radius beliebig ist, bezeichnen wir als die Sphäre der Projektion.

Indem wir nun im Nachfolgenden bisweilen die Flächen eines Krystalles durch ihre Pole repräsentiren, haben wir freilich wieder eine Zeichnung, und zwar die der Projektions-Sphäre mit den Polen der Flächen zu entwerfen, eine Konstruktion, deren richtige Lösung wir ebenfalls erst in einem späteren Kapitel geben werden. Allein es ist nicht nur diese Konstruktion in den meisten Fällen einfacher als die Zeichnung der Kanten des Krystalles selbst, sondern sie ist auch schon von grossem Nutzen, wenn auch nur beiläufig den Verhältnissen des betrachteten Krystalles entsprechend ausgeführt. Nur so viel sei hier noch bemerkt, dass bei der Zeichnung der Sphäre der Projektion wir uns das Zentrum derselben meist in der Ebene des Papieres gelegen denken, so dass der Durchschnitt der Kugel mit dem Papiere ebenfalls ein grösster Kreis, d. h. ein Kreis von dem beliebigen Halbmesser der Sphäre wird.

Die nachfolgenden Bemerkungen werden den Nutzen, welchen die Repräsentation der Ebenen durch die Pole derselben gewährt, noch näher erkennen lassen.

Da grösste Kreise einer Kugel solche sind, deren Ebenen durch das Zentrum der Kugel gehen, so ist es klar, dass die durch die Normalen zweier Ebenen gelegte Ebene die Sphäre der Projektion in einem grössten Kreise schneiden muss. Ziehen wir in Fig. 5 um den Punkt *O* einen Kreis, welcher die Normalen *ON* und *ON'* zweier Ebenen in den Punkten *P* und *P'* trifft, so werden diese Punkte die Pole der beiden Flächen sein und der Kreisbogen *PP'* zwischen den Polen wird im Bogenmasse gemessen gleich sein dem Winkel der Normalen der beiden Ebenen, nämlich dem Winkel *NON'*. Legt man daher durch die Pole zweier Ebenen einen grössten Kreis, so wird der Bogen desselben, welcher zwischen den beiden Polen liegt, gleich sein dem äusseren Neigungswinkel der zwei Ebenen, mit dem inneren aber sich zu 180^0 ergänzen. Wir werden diesen Bogen kurz den Abstand oder die Entfernung der beiden Pole nennen.

Es ist ferner klar, dass die Pole tautozonaler Ebenen in einem und demselben grössten Kreise der Sphäre liegen müssen, da ja die Normalen solcher Ebenen sämmtlich in einer durch das Zentrum der Sphäre gehenden Ebene liegen. Man nennt einen solchen grössten Kreis daher auch den zu der gegebenen Zone zugehörigen Zonenkreis. Natürlich wird jeder Zonenkreis, in welchem der Pol einer Ebene *P* liegt auch durch den Pol der zu *P* gerade entgegengesetzten Ebene *P'* gehen, und der Abstand der Pole *P*, *P'* wird 180^0 betragen müssen. Die Normalen zweier solcher Ebenen fallen ja in eine einzige Linie zusammen.

Liegt eine Ebene in zwei Zonen, so fällt der Pol dieser Ebene offenbar mit dem Durchschnittspunkte der beiden Zonenkreise zusammen, die auf der Sphäre der Projektion den zwei Zonen entsprechen: der Pol der betrachteten Ebene muss ja in diesen beiden Zonenkreisen liegen.

Man sieht auch leicht ein, dass ein Zonenkreis seiner Lage nach bekannt ist, wenn zwei in demselben liegende Pole gegeben sind; diese zwei Pole bilden mit dem Zentrum der Sphäre drei Punkte, welche ja zur Bestimmung der Lage einer Ebene im Allgemeinen hinreichen. Diess letztere findet jedoch nicht mehr statt, sobald die drei Punkte in einer Geraden liegen; durch die Pole entgegengesetzter Ebenen wird also ein Zonenkreis nicht bestimmt, durch zwei solche Pole können vielmehr unendlich viele grösste Kreise gelegt werden.

Ist das Zentrum der Sphäre, als welches man gewöhnlich den Axenmittelpunkt wählt, nicht seiner Lage nach bekannt, so genügt es zur Bestimmung eines Zonenkreises der Sphäre, wenn man die Pole dreier Ebenen desselben kennt, da man ja durch drei Punkte nur einen

einzigen Kreis legen kann. Unter diesen drei Punkten können aber auch die Pole entgegengesetzter Ebenen sein.

In Fällen, wo wir die Winkel der Kanten eines Krystalles zu betrachten haben, werden wir die Kanten ebenfalls zweckmässig bloss durch ihre Endpunkte repräsentiren, d. i. durch die Punkte, in welchen sie die Sphäre der Projektion treffen, wenn sie so parallel zu sich selbst verschoben werden, dass sie durch das Zentrum der Sphäre, also durch den Axenmittelpunkt gehen. Der Abstand der Endpunkte zweier Kanten auf der Sphäre ist natürlich gleich dem Winkel, den diese Kanten mit einander bilden.

Sind P und Q auf der Sphäre der Projektion die Pole zweier Ebenen, so wird der Endpunkt der Kante dieser Ebenen, von jedem Punkte des Zonenkreises PQ um 90^0 abstehen. Diese Kante, durch das Zentrum der Sphäre gezogen, ist ja nichts anderes als die Axe der Zone PQ und ist daher senkrecht zur Normale jeder Ebene derselben. Wir nennen diesen Punkt, in welchen die Kante zweier Ebenen oder die Axe der Zone dieser Ebenen die Sphäre trifft, den Pol dieser Zone, derselbe steht, wie wir gesehen, von jedem Punkt des entsprechenden Zonenkreises um 90^0 ab.

Umgekehrt ist auf der Sphäre der Projektion ein Punkt von zwei Punkten eines Zonenkreises um 90^0 entfernt, so ist derselbe der Pol dieses Zonenkreises; denn der zu diesem Punkte gehörige Radius der Sphäre steht offenbar senkrecht auf der Ebene des betrachteten Zonenkreises und ist daher die Axe dieser Zone.

2. Kapitel.

Das erste Hauptgesetz der Krystallographie.

§. 7. Die Rationalität der Indices der Krystallflächen.

Sind mit Bezug auf bestimmte Axenrichtungen die Parameter einer Ebene P gleich OA, OB, OC, die einer zweiten Ebene Q aber gleich OH, OK, OL, so kann man offenbar die zweite Ebene statt durch ihre Parameter auch dadurch bestimmen, dass man angibt der wievielte Theil jeder ihrer Parameter von dem entsprechenden Parameter der ersten Ebene P ist. Setzt man daher

$$\frac{OA}{OH}=h, \frac{OB}{OK}=k, \frac{OC}{OL}=l$$

so wird, falls man die Längen OA, OB, OC kennt, durch die Verhältniszahlen h, k, l die Ebene Q vollkommen bestimmt sein; denn ihre Parameter ergeben sich leicht durch Umkehrung der vorhergehenden Gleichungen, welche alsdann werden

$$OH=\frac{OA}{h}, OK=\frac{OB}{k}, OL=\frac{OC}{l}$$

Ja man kann auch die Grössen h, k, l mit einer beliebigen Zahl multipliziren oder dividiren, ohne dass sie aufhören die Lage der Ebene Q zu bestimmen, indem dadurch, wie aus den vorstehenden Gleichungen ersichtlich ist, nur die Parameter der Ebene Q ebenfalls mit der betreffenden Zahl multiplizirt oder dividirt werden, was ja auf die Richtung einer Ebene keinen Einfluss hat. Man kann daher auch immer eine der drei Grössen h, k, l gleich eins oder gleich irgend einer anderen Zahl machen.

Sind für eine dritte Ebene Q' die Parameter OH', OK', OL', so wird man, wenn dieselben mit denen der Ebene P verglichen werden, ähnlich setzen können

$$\frac{OA}{OH'} = h', \frac{OB}{OK'} = k', \frac{OC}{OL'} = l'$$

und die Ebene Q' wird dann gegeben sein durch die Grössen h', k', l'.

Man sieht, dass man auf diese Weise alle Ebenen, die einen Körper einschliessen, durch die Parameter OA, OB, OC einer einzigen Ebene, und durch die Verhältniszahlen derselben zu den Parametern der anderen Ebenen bestimmen kann. Man nennt alsdann die Grössen OA, OB, OC die Axenlängen und bezeichnet sie der Reihe nach meist mit den Buchstaben a, b, c; die Zahlen h, k, l einer Ebene Q dagegen nennt man die Indices und das Zeichen (hkl) das Symbol dieser Ebene. Man kann natürlich auch die Axenlängen, da sie ja nur die Parameter einer Ebene vorstellen mit einer beliebigen Zahl multipliziren oder dividiren; daher man immer eine Axenlänge, gewöhnlich die grösste, gleich eins macht.

Die Erfahrung hat nun gelehrt, dass die Ebenen, welche einen Krystall begrenzen, und die wir kurz Krystallflächen nennen, folgendem Gesetze unterworfen sind:

„An einem Krystalle können nur solche Flächen beobachtet werden, deren Indices sich wie rationale Zahlen verhalten, wenn man den Krystall auf ein Axensystem bezieht, dessen Richtungen und Längen durch beliebige Flächen dieses Krystalles bestimmt werden.“

Wir nennen dieses Gesetz, welches für die Krystallographie von der grössten Wichtigkeit ist, das erste Hauptgesetz derselben, oder das Gesetz der Rationalität der Indices.

Wir nennen ferner ein Axensystem, für welches die Flächen eines Krystalles dem angegebenen Gesetze gehorchen, dessen Richtungen daher parallel den Durchschnitten dreier Flächen, dessen Längen aber die Abschnitte einer vierten Fläche dieses Krystalles sein müssen, ein krystallographisches Axensystem. Wir wollen auch im folgenden, wenn von dem Axensystem eines Krystalles gesprochen wird, immer ein krystallographisches verstehen, falls nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt ist.

Man nennt die drei Axenwinkel und die drei Axenlängen eines krystallographischen Axensystems zusammen die Elemente des betreffenden Krystalles. Dieselben stellen nur fünf von einander unabhängige Grössen vor, da man ja die drei Axenlängen mit einer beliebigen Zahl

multipliziren oder dividiren, und daher immer eine Länge gleich eins machen kann. Mit Hilfe der Elemente eines Krystalles kann man alle an diesem Krystalle möglicherweise vorkommenden Flächen angeben, indem ja jede Fläche eine mögliche ist, deren Indices sich wie rationale Zahlen verhalten. Da man aber auch die Indices einer Fläche, wie wir gesehen, mit einer beliebigen Zahl multipliziren oder dividiren kann, so ist man auch berechtigt zu sagen, dass die Indices einer Krystallfläche selbst drei ganze rationale Zahlen sind. Denn sind h, k, l die Indices einer Krystallfläche Q, so werden dieselben der Definition zufolge, mittelst Division der Axenlängen durch die betreffenden Parameter erhalten, im allgemeinen drei irrationale Zahlen vorstellen. Dividirt man nun alle drei, durch eine von ihnen, etwa h, so werden die Indices $1, \frac{k}{h}, \frac{l}{h}$, und sollen diese drei Grössen sich wie rationale Zahlen verhalten, so ist diess, da der erste Index jetzt schon für sich rational ist, nur möglich, wenn auch die beiden andern rationale Zahlen sind. Die Brüche $\frac{k}{h}$ und $\frac{l}{h}$ müssen sich daher so abkürzen lassen, dass sie rational und also etwa gleich $\frac{m}{n}$ und $\frac{p}{q}$ werden, wo nun m, n, p, q vier ganze rationale Zahlen bedeuten. Die drei Indices der Fläche Q sind alsdann $1, \frac{m}{n}, \frac{p}{q}$ oder (indem man mit nq alle drei multiplizirt) nq, mq, np, in welcher Form sie nun wirklich drei ganze rationale Zahlen vorstellen.

Natürlicherweise gibt man die Indices einer Fläche immer in einer solchen Form an, wo sie schon auf ganze rationale Zahlen gebracht sind. Es zeigt sich aber hierbei, dass die Indices der an Krystallen vorkommenden Flächen, wenigstens für gewisse Axensysteme der Krystalle sich meist durch sehr kleine ganze rationale Zahlen wie 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6... ausdrücken lassen und dass höhere Werthe äusserst selten sind. Gewöhnlich sind auch die an einem Krystalle vorherrschenden Flächen diejenigen, welche die niedrigsten Zahlen zu Indices haben. Der Umstand, dass die Indices sich meist durch so niedere Zahlen, wie angegeben, ausdrücken lassen, macht es möglich, auch wenn man für die Indices einer Fläche durch Beobachtung nur annähernde Werthe gefunden hat, doch die wahren rationalen Zahlenwerthe derselben anzugeben. Denn sind h, k, l für eine Fläche irgendwie durch die Beobachtung, etwa durch direkte Messung der Parameter bestimmt, so werden wir zwar finden, dass die Brüche $\frac{k}{h}$ und $\frac{l}{h}$ nicht absolut rational

sind, dass aber doch jeder dem Verhältnisse zweier einfachen rationalen Zahlen nahe kommt, und diess Verhältnis wird daher der wahre Werth des Bruches sein. Finden wir z. B. durch die Beobachtung

$$\frac{k}{h} = 1{\cdot}310\,,\ \frac{l}{h} = 1{\cdot}986,$$

so ist klar, dass der richtige Werth des ersten Bruches $\frac{4}{3}$ ist, indem $\frac{13}{10}$, welches allerdings der Beobachtung näher kommt, schon zu hohe Zahlen enthält. Der genaue Werth des zweiten Bruches wird 2 sein, und die Indices der betreffenden Fläche werden daher 1, $\frac{4}{3}$, 2 oder 3, 4, 6.

Dividirt man, um die Parameter einer Fläche zu erhalten, die drei Axenlängen a, b, c eines Krystalles durch die Indices h, k, l dieser Fläche, wo aber h, k, l schon drei ganze rationale Zahlen bedeuten sollen, und multiplizirt man alsdann die drei Parameter mit dem Produkte hkl, so werden dieselben

$$kla,\ lhb,\ hkc.$$

In dieser Form stellen nun die Parameter ganze rationale Vielfache der Axenlängen vor. Man kann sich daher von den Flächen, die an einem bestimmten Krystalle möglich sind, auch dadurch eine Vorstellung machen, dass man sich auf den Axen des Krystalles zu beiden Seiten vom Mittelpunkte die Axenlängen 1, 2, 3, 4 . . . mal aufträgt dann von den so bestimmten Punkten auf jeder Axe einen auswählt, und die letzteren drei Punkte durch gerade Linien verbindet. Indem man alle möglichen Kombinationen der Punkte vornimmt, erhält man die Durchschnitte aller möglicher Flächen mit ihren betreffenden Oktanten.

Sind alle Indices einer Fläche gleich eins, ist ihr Symbol also (111), so wird diess offenbar die Fläche sein, deren Parameter die Axenlängen bestimmen, denn die Parameter dieser Fläche sind ja

$$\frac{a}{1},\ \frac{b}{1},\ \frac{c}{1}.$$

Liegt eine Fläche nicht in demselben Oktanten mit der Fläche (111), so müssen natürlich einer oder mehrere ihrer Indices negativ werden. Man bezeichnet einen negativen Index dadurch, dass man das — Zeichen über denselben setzt. So hat z. B. die Fläche ($\bar{h}kl$) die Parameter

$$-\frac{a}{h},\ \frac{b}{k},\ \frac{c}{l}.$$

Aendert man die Vorzeichen der drei Indices einer Fläche in die entgegengesetzten um, so erhält man das Symbol einer zur ersten parallelen Fläche im entgegengesetzten Oktanten. Durch die Aenderung des Zeichens der Indices werden nämlich ja auch die Zeichen der Parameter in die entgegengesetzten umgewandelt.

Wird ein Index für eine Axe gleich Null, so bedeutet diess, dass die Fläche parallel der entsprechenden Axe ist, denn z. B. für die Fläche $(hk0)$ hat man die Parameter

$$\frac{a}{h}, \frac{b}{k}, \frac{c}{0} = \infty.$$

Werden zwei Indices gleich Null, so ist die Ebene parallel zweien Axen, also auch parallel der betreffenden Ebene dieser Axen. So ist $(h00)$ oder was dasselbe (100) das Symbol einer Fläche parallel der Axenebene YZ. Die Ebenen ZX und XY sind parallel den Flächen (010) und (001).

Aus dem Gesagten ergibt sich sehr leicht, dass nach der im §. 2 gegebenen Definition für einen bestimmten Krystall das Hexaid der Inbegriff der Flächen

$$\begin{matrix} 100 & 010 & 001 \\ \bar{1}00 & 0\bar{1}0 & 00\bar{1} \end{matrix}$$

sein wird. Das Oktaid dagegen wird aus den Flächen

$$\begin{matrix} 111 & \bar{1}11 & 1\bar{1}1 & 11\bar{1} \\ \bar{1}\bar{1}\bar{1} & 1\bar{1}\bar{1} & \bar{1}1\bar{1} & \bar{1}\bar{1}1 \end{matrix}$$

und das Dodekaid aus den Flächen

$$\begin{matrix} 110 & 101 & 011 & \bar{1}10 & 10\bar{1} & 0\bar{1}1 \\ \bar{1}\bar{1}0 & \bar{1}0\bar{1} & 0\bar{1}\bar{1} & 1\bar{1}0 & \bar{1}01 & 01\bar{1} \end{matrix}$$

bestehen. Die Symbole der Flächen dieser drei Gruppen sind also unabhängig von den Elementen und sie werden daher auch noch gelten, wenn die Winkel der Axen rechte und die Längen derselben einander gleich werden. Alsdann gehen aber diese Flächenkomplexe in das reguläre Hexaeder, Oktaeder und Dodekaeder über, und es zeigt sich, dass im Einklange mit dem Gesetze der Rationalität der Indices die Begrenzungsebenen dieser drei stereometrischen Gestalten, Flächen eines und desselben Krystalles sein können: freilich müssen die Elemente eines solchen Krystalles besondere Bedingungen erfüllen.

Wir können das Verhältnis der Axenlängen statt durch die Parameter der Fläche (111) auch durch die Parameter OH, OK, OL einer beliebigen anderen Fläche Q bestimmen, wenn wir nur die Indices

h, k, l der letztern kennen; denn es muss ja dem Vorhergehenden zufolge

$$a : b : c = h.\ OH : k.\ OK : l.\ OL$$

sein. Eine Ausnahme macht nur der Fall, in welchem die Fläche Q parallel einer Axe, also ihr Symbol etwa $(hk0)$ wird; wir erhalten alsdann aus den Parametern OH, OK, ∞ der Fläche Q nur das Verhältnis zweier Axenlängen, nämlich

$$a : b = h.\ OH : k.\ OK$$

Kennen wir aber gleichzeitig die Parameter einer Fläche $R\,(p0r)$, die parallel einer andern Axe ist, so können wir wieder das Verhältnis aller drei Axenlängen ermitteln. Denn sind die Parameter der Fläche R die Grössen OP, ∞, OR, so hat man

$$a : c = p.\ OP : r.\ OR$$

Aus dieser und der vorhergehenden Proportion ergibt sich aber leicht

$$a : b : c = lp.\ OH.\ OR : kp.OK.\ OR : lr.\ OH.\ OP$$

§. 8. Richtung der Durchschnittslinie zweier Ebenen, bestimmt durch die Indices der letzteren.

Lassen wir die Durchschnittslinien zweier Ebenen durch den Axenmittelpunkt gehen, und die Diagonale eines Parallelopipeds sein, dessen Seiten parallel den drei Axen sind, so ist uns die Richtung der Durchschnittslinie bekannt, falls uns nebst den Axenwinkeln das Verhältnis der drei Seiten des Parallelopipeds gegeben sind.

Wir haben im §. 3 gezeigt, wie man die Längen dieser Seiten aus den Parametern der zwei sich schneidenden Ebenen bestimmen könne. Wir wollen nun in den betreffenden Gleichungen die Parameter durch die Axenlängen und die Indices der zwei Ebenen ausdrücken. Die zwei gegebenen Ebenen seien $P\ (efg)$ und $Q\ (hkl)$, die Axenlängen aber a, b, c. Die Parameter der beiden Ebenen sind alsdann

$$OH = \frac{a}{e},\ OK = \frac{b}{f},\ OL = \frac{c}{g}$$

$$OH' = \frac{a}{h},\ OK' = \frac{b}{k},\ OL' = \frac{c}{l}$$

und die Seiten des betreffenden Parallelopipeds nach §. 3 somit

$$OU = \frac{1}{OK.\,OL'} - \frac{1}{OL.\,OK'} = \frac{fl - gk}{bc} = \frac{u}{bc}$$

$$OV = \frac{1}{OL.OH'} - \frac{1}{OH.OL'} = \frac{gh - el}{ca} = \frac{\text{v}}{ca}$$

$$OW = \frac{1}{OH.OK'} - \frac{1}{OK.OH'} = \frac{ek - hf}{ab} = \frac{\text{w}}{ab}$$

Da wie wir in demselben Paragraphe gesehen, die Richtung der Diagonale nicht geändert wird, wenn man die drei Seiten mit derselben Grösse multiplizirt oder dividirt, so werden diese Längen, indem man sie mit dem Produkte *abc* multiplizirt,

$$a\text{u},\ b\text{v},\ c\text{w}$$

Die zur Abkürzung mit u, v, w bezeichneten Grössen sind aus den Indices der beiden Ebenen auf eine Weise gebildet, die durch nachfolgendes Schema dem Gedächtnisse eingeprägt werden kann:

$$\begin{array}{ccccc} e & f & g & e & f \\ & \times & \times & \times & \\ h & k & l & h & k \\ \hline & fl - gk & gh - el & ek - fh & \\ & \text{u} & \text{v} & \text{w} & \end{array}$$

Man sieht auch leicht ein, dass sobald nur die Indices der beiden Ebenen rational werden, diese Ebenen also mögliche Flächen eines Krystalles sind, auch die Grössen u, v, w rational werden.

Aus dem in diesem Paragraphe Entwickelten geht somit hervor, dass, um die Richtung der Durchschnittslinie der beiden Ebenen *P* und *Q* zu bestimmen, man auf den Axen, deren Längen respektive u, v und w mal mit Berücksichtigung des Vorzeichens dieser Grössen aufzutragen, und über diese Linien ein Parallelopiped zu errichten habe, in welchem die Verbindungslinie des Axenmittelpunktes mit dem gegenüberstehenden Ecke die gesuchte Richtung der Durchschnittslinie gibt.

§. 9. Beziehungen zwischen den Indices tautozonaler Ebenen.

Wie wir schon im §. 4 bemerkt haben, muss für die Parameter und folglich auch für die Indices dreier Ebenen, welche in einer Zone liegen sollen, eine gewisse Bedingungsgleichung bestehen, deren Form in diesem Paragraphe aufgefunden werden soll. Wir erhalten diese Bedingungsgleichung aber leicht durch folgende Betrachtung.

Die drei Ebenen

$$P\,(efg),\quad Q\,(hkl),\quad R\,(pqr)$$

werden offenbar in einer Zone liegen, sobald nur die Durchschnittslinie der Ebenen *P* und *Q* parallel der Durchschnittslinie von *Q* und *R* ist.

denn alsdann sind alle drei Ebenen parallel ein und derselben Richtung und daher tautozonal. Damit aber diese beiden Durchschnittslinien einander parallel seien, ist es, wenn wir uns die Richtung derselben mit Hilfe zweier Parallelopipede nach den Regeln des vorhergehenden Paragraphes konstruiren, offenbar nothwendig, dass die betreffenden Diagonalen der Parallelopipede zusammenfallen, weil sie beide durch ein und denselben Punkt, den Axenmittelpunkt gehen.

Nach dem im §. 3 Gesagten werden aber die Diagonalen der beiden Parallelopipede zusammenfallen, sobald die Seiten der letzteren sich nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden. Für die angenommenen Symbole der Ebenen P, Q, R sind nun die Seiten des Parallelopipedes, welches die Durchschnittslinie $[P\,Q]$ bestimmt,

$$a\,(fl - gk),\ b\,(gh - el),\ c\,(ek - fk);$$

die entsprechenden Ausdrücke für die Linie $[QR]$ aber

$$a\,(kr - lq),\ b\,(lp - hr),\ c\,(hq - kp).$$

Sollen also die drei Ebenen P, Q, R tautozonal sein, so müssen ihre Indices die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} C\,(fl - gk) &= kr - lq \\ C\,(gh - el) &= lp - hr \\ C\,(ek - fh) &= hq - kp \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

erfüllen, in welchen C einen konstanten Faktor bedeutet, und in welchen die Axenlängen a, b, c nun nicht mehr vorkommen, da sie sich in den beiden Theilen der einzelnen Gleichungen aufheben.

Multipliziren wir die erste dieser Gleichungen mit e, die zweite mit f, die dritte mit g und addiren sie, so erhalten wir schliesslich als gesuchte Bedingungsgleichung

$$o = ekr - elg + flp - fhr + ghq - gkp \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

in welcher Form sie vollkommen symmetrisch nach den Indices der drei Ebenen ist. Wir sehen sogleich, dass die Bedingung, unter welcher drei Ebenen tautozonal sind, unabhängig ist von den Richtungen und Längen der Axen. Erfüllen also die Indices dreier Flächen eines Krystalles diese Bedingungsgleichung, so sind diese Flächen tautozonal, wie auch immer das Axensystem dieses Krystalles beschaffen sein möge. Setzen wir wie im vorhergehenden Paragraphe

$$\begin{aligned} \mathfrak{u} &= fl - gk \\ \mathfrak{v} &= gk - el \\ \mathfrak{w} &= ek - fh \end{aligned}$$

so kann man die Gleichung (2) auch so schreiben

(3) . . . . $\mathrm{u}\,p + \mathrm{v}\,q + \mathrm{w}\,r = 0$

Da nun die Grössen u, v, w nur von den Indices der Ebenen P und Q abhängen, so lässt die Gleichung (3) sehr klar die Bedingung erkennen für die Indices irgend einer andern Ebene (pqr), welche in einer Zone mit P und Q liegen soll. Sind die Ebenen P und Q Krystallflächen, ihre Indices also ganze rationale Zahlen, so sind ersichtlich auch die Grössen u, v, w ganze rationale Zahlen. Die Bildungsweise der letzteren Grössen aus den Indices der Ebenen P und Q haben wir schon im vorhergehenden Paragraphe angegeben. Bestimmen wir uns aber diese Ausdrücke für zwei andere Flächen der Zone $[P\ Q]$, so können sich die so erhaltenen Werthe von u, v, w nur durch einen konstanten Faktor von den früheren unterscheiden; die Grössen au, bv, cw geben ja die Durchschnittslinie zweier Ebenen, diese hat aber für je zwei Ebenen einer Zone immer dieselbe Richtung. Man kann daher auch die Grössen u, v, w mit einer beliebigen Zahl multipliziren oder dividiren, falls dieselben nur die Richtung der Zonenaxe bestimmen sollen.

Wir können aber immer mit denselben die Symbole aller Flächen eines Krystalles angeben, die in der Zone der zwei Flächen P und Q möglich sind; wir haben nur für q und r je zwei der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4 . . . . zu setzen, für p aber den alsdann aus Gleichung (3) resultirenden Werth zu nehmen, wenn (pqr) allgemein das Symbol der gesuchten Flächen vorstellt.

Man ersieht leicht, dass wenn die Gleichung (3) durch die Indices einer Ebene Q erfüllt wird, dies auch dann noch der Fall ist, wenn die Indices mit entgegengesetzten Zeichen genommen werden. Liegt daher die Fläche Q eines Krystalles in irgend einer Zone desselben, so liegt in dieser Zone auch die zu Q parallele Fläche des entgegengesetzten Oktanten.

Die Grössen u, v, w müssen aber für jede Zone eines und desselben Krystalles verschiedene Werthe haben, denn wären dieselben für zwei Zonen gleich, so müssten die Flächen der einen Zone auch mögliche Flächen der andern sein, da ja die Indices dieser Flächen die gemeinsame Bedingungsgleichung beider Zonen erfüllen; diess hiesse aber offenbar so viel als, die beiden Zonen sind identisch mit einander und sind keine verschiedenen.

Wir nennen die Grössen u, v, w, welche wie wir gesehen, die Zone $[P\ Q]$ vollkommen bestimmen die Indices dieser Zone, das Zeichen [u v w] aber das Symbol derselben und haben so für eine Zone die gleichwerthigen Bezeichnungen:

$$[PQ] = [hkl,\ pqr] = [\mathrm{u\ v\ w}]$$

Werden einer oder mehrere der Indices einer Zone negativ, so drückt man diess durch einen über die betreffende Grösse gezogenen Strich aus.

Vertauscht man in dem für die Berechnung von u, v, w gegebenen Schema die Indices der Flächen P und Q, so wird man offenbar für u, v, w dieselben Werthe wie früher aber mit entgegengesetzten Zeichen erhalten; wir können daher schreiben

$$[PQ] = -[QP]$$

In dem Nachfolgenden werden wir sehen, dass es bisweilen von Interesse ist, den konstanten Faktor zu kennen, durch welche sich die Indices einer Zone unterscheiden, je nachdem dieselben aus verschiedenen Flächen dieser Zone berechnet werden. Sind $P\ (efg)$, $Q\ (hkl)$, $P'\ (e'f'g')$, $Q'\ (h'k'l')$ vier tautozonale Flächen, so bezeichnen wir die Grösse C, die man erhält, wenn man einen Index $[PQ]$ durch den entsprechenden von $[P'Q']$ dividirt, durch das Symbol $\left[\frac{P\ Q}{P'\ Q'}\right]$ und haben also

$$C = \frac{fl - gk}{f'l' - g'k'} = \frac{gh - el}{g'h - e'l'} = \frac{ek - fp}{e'k' - f'p'} = \left[\frac{P\ Q}{P'\ Q'}\right] \quad . \ . \ . \ (4)$$

Um die Grösse C zu berechnen, würde einer dieser drei Brüche genügen; allein es kann geschehen, dass sogar zwei dieser Brüche die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annehmen, wo dann erst der dritte den wahren Werth von C gibt. Soll daher der letztere Werth mit möglichst wenig Zeitverlust berechnet werden, so ist es am besten, man berechnet sich nach dem gegebenen Schema gleich alle drei Indices der beiden Zonensymbole $[PQ]$ und $[P'Q']$, wo man dann leicht den gemeinsamen Werth des Quotientes der entsprechenden Indices erkennt. Die Operationen zur Ermittelung des Werthes von C sind also successive

$$\left[\frac{P\ Q}{P'\ Q'}\right] = \left[\frac{h\ k\ l,\ p\ q\ r}{h'\ k'\ l',\ p'q'r'}\right] = \left|\frac{\begin{matrix} h & k & l & h & k \\ & \times & \times & \times & \\ p & q & r & p & q \end{matrix}}{\begin{matrix} h' & k' & l' & h' & k' \\ & \times & \times & \times & \\ p' & q' & r' & p' & q' \end{matrix}}\right| = \left[\frac{\mathrm{u,\ v,\ w}}{\mathrm{u',\ v',\ w'}}\right] = C$$

Nur hat man bei der Ausführung dieser Operationen immer die richtige im Symbole $\left[\frac{PQ}{P\ Q}\right]$ angedeutete Ordnung der Flächen zu

bewahren. Mit Hilfe der Gleichung (4) ergibt sich leicht die Richtigkeit der nachfolgenden

$$\left[\frac{PQ}{P'Q}\right] = -\left[\frac{QP}{P'Q'}\right] = \left[\frac{QP}{Q'P}\right] = 1 : \left[\frac{PQ'}{PQ}\right]$$

Aus derselben Gleichung ersieht man aber auch, dass sobald nur P, Q, P, Q' Krystallflächen sind, C eine rationale Grösse ist.

Um schliesslich noch ein Zahlen-Beispiel zu geben, so überzeugt man sich, dass die Flächen ($\bar{3}11$), (201), (314) tautozonal und das Symbol ihrer Zone [$15\bar{2}$] ist. In dieser Zone liegen daher auch die Flächen (025), ($5\bar{1}0$), ($\bar{1}\bar{1}\bar{3}$) u. s. f.

§. 10. Werthe der Indices einer Ebene, die in zwei Zonen liegt.

Liegt eine Ebene R in zwei Zonen, deren Symbole [hkl] und [u v w] sind, so hat man für die Indices p, q, r dieser Fläche zwei Bedingungsgleichungen, wodurch die Indices derselben vollkommen bestimmt sind, da sie ja nur zwei variable Grössen vorstellen. Man hat

$$\mathrm{h}p + \mathrm{k}q + \mathrm{l}r = o$$
$$\mathrm{u}p + \mathrm{v}q + \mathrm{w}r = o$$

hieraus findet man leicht

$$p = r\frac{\mathrm{kw-lv}}{\mathrm{hv-ku}}$$
$$q = r\frac{\mathrm{lu-hw}}{\mathrm{hv-ku}}$$

Da man nun einen der Indices einer Ebene beliebig annehmen kann, so können wir l gleich dem gemeinschaftlichen Nenner dieser zwei Brüche setzen und erhalten so

$$p = \mathrm{kw - lv}$$
$$q = \mathrm{lu - hw}$$
$$r = \mathrm{hv - ku}$$

durch welche Gleichungen also die Indices eine Ebene gegeben sind, die in zwei bekannten Zonen liegt. Für die Bildung der Indices p, q, r aus den Symbolen der beiden Zonen hat man dasselbe Schema wie für die Bildung der Indices der Zonen selbst; man hat

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{h} & \mathrm{k} & \mathrm{l} & \mathrm{h} & \mathrm{k} \\ & \times & \times & \times & \\ \mathrm{u} & \mathrm{v} & \mathrm{w} & \mathrm{u} & \mathrm{v} \\ \hline \end{array}$$
$$\mathrm{kw-lv},\ \mathrm{lu-hw},\ \mathrm{hv-ku}$$
$$p \qquad q \qquad r$$

Man sieht auch sogleich, dass wenn die beiden Zonen einem Krystalle angehören, ihre Indices also rationale Grössen sind, diess auch von den Indices der Ebene, welche in diesen beiden Zonen liegt, gelten muss, und dass daher eine solche Ebene stets eine mögliche Fläche des Krystalles ist.

So findet man z. B., dass in den beiden Zonen $[15\bar{2}]$ und $[120]$ die Fläche $(\bar{4}23)$, in den beiden Zonen $[1\bar{2}1]$ und $[310, \bar{1}02]$ aber die Fläche $(41\bar{2})$ liegt.

§. 11. Aenderung der Axenlängen.

Hat man mit Hilfe von vier Flächen die Elemente eines Krystalles bestimmt, so kann man, wie wir gesehen, durch Multiplikation der Axenlängen mit einfachen ganzen Zahlen sämmtliche an diesem Krystalle mögliche Flächen ableiten. Bestimmt man nun durch irgend welche dieser möglichen Flächen ein Axensystem, so müssen nach dem gegebenen Wortlaute des ersten Grundgesetzes die Flächen des Krystalles auch jetzt noch diesem Gesetze genügen. Es liegt hiebei die Frage nahe, ob dies denn allgemein geometrisch möglich ist oder ob nicht wenigstens die ursprünglichen Elemente gewisse Bedingungen erfüllen müssen. Allein wir werden sehen, dass die ursprünglichen Elemente ganz willkürlich sind, indem wir folgenden Satz beweisen werden: Genügt ein Komplex von Ebenen mit Bezug auf ein Axensystem gebildet aus vier dieser Ebenen dem Gesetze der Rationalität der Indices, so genügt er diesem Gesetze auch für jedes Axensystem, das von vier anderen Ebenen des Komplexes gebildet wird.

Wir werden die Richtigkeit dieses Satzes nachgewiesen haben, wenn wir gezeigt, dass der Komplex von Ebenen dem Gesetze der Rationalität auch noch gehorcht, sowohl wenn wir die Axenlängen durch irgend eine andere Ebene bestimmen, als auch dann, wenn wir zu einer Axenebene eine andere Ebene des Komplexes wählen. Gilt nämlich der der Satz für die Aenderung einer Axenebene, so gilt er auch für die Aenderung aller Axenebenen, wir brauchen ja nur die Vertauschung der Axenebenen successive vorzunehmen, wo dann jedesmal der für die Vertauschung einer Axenebene bewiesene Satz gilt; das Resultat wird aber dann doch diess sein, dass wir schliesslich drei neue Ebenen zu Axenebenen gemacht haben, daher der Satz dann auch für diesen Fall gelten muss.

Wir wollen in diesem Paragraphe nur die erste Hälfte des Beweises geben, nämlich zeigen, dass der aufgestellte Satz gilt, wenn man die Axenlängen nicht mehr durch die Ebene $T(111)$ sondern durch irgend eine andere

Ebene R (efg) des Komplexes bestimmt. Nennt man die Axenlängen im ersten Falle a, b, c im zweiten a', b', c', so ist offenbar der Definition der Indices zufolge, da ja a', b', c' die Parameter der Ebene R sind

$$(1) \ldots\ldots \quad a' = \frac{a}{e}, \quad b' = \frac{b}{f}, \quad c' = \frac{c}{g}$$

Es frägt sich nun, welches Symbol wird irgend eine andere Ebene Q (pqr) mit Bezug auf die neuen Axenlängen erhalten. Da die Parameter dieser Ebene dieselben bleiben, welche Axenlängen man auch zu Grunde legt, wenn nur nicht die Axenrichtungen geändert werden, so hat man, wenn $(p'q'r')$ das Symbol der Ebene Q mit Bezug auf die neuen Axen ist,

$$\frac{a'}{p'} = \frac{a}{p}, \quad \frac{b'}{q'} = \frac{b}{q}, \quad \frac{c'}{r'} = \frac{c}{r}.$$

Hieraus findet man mit Rücksicht auf die Gleichungen (1)

$$(2) \ldots\ldots \quad p' = \frac{p}{e}, \quad q' = \frac{q}{f}, \quad r' = \frac{r}{g}.$$

Sind nun p, q, r, h, k, l rationale Grössen, so müssen diesen Gleichungen zufolge auch p', q', r' rational sein, womit wir da R eine ganz beliebige Ebene des gegebenen Komplexes vorstellt, die Richtigkeit des aufgestellten Satzes für die blosse Aenderung der Axenlängen bewiesen haben.

Aus den Gleichungen (1) und (2) ersieht man auch, dass um die neuen Axenlängen und Indices zu finden, man bloss die alten Werthe derselben durch die entsprechenden Indices der Ebene zu dividiren hat, welche nunmehr die neuen Axenlängen bestimmen soll. Da man zur letzteren Ebene jede wählen kann, deren Indices ganze oder gebrochene rationale Grössen sind, so kann man auch sagen: „Man kann ohne einen Fehler zu begehen, die Axenlängen und die Indices sämmtlicher Flächen eines Krystalles gleichzeitig der Reihe nach mit drei beliebigen rationalen Zahlen multipliziren oder dividiren.“

Wählt man von diesen drei Zahlen eine oder zwei gleich eins, so werden ersichtlich nur zwei oder eine Axenlänge geändert.

§. 12. Aenderung der Axenebenen.

Wir haben jetzt zu beweisen, dass der im vorhergehenden Paragraphe aufgestellte Satz auch für die Aenderung einer der Axenebenen gilt. Es seien in Fig. 6 — OX, OY, OZ die Axenrichtungen, parallel den Durchschnitten der Ebenen U (100), V (010), W (001),

$$(1) \ldots\ldots\ldots \quad OA = a, \quad OB = b, \quad OC = c$$

aber die Parameter der die Axenlängen bestimmenden Ebene T (111). Statt der Ebene U soll eine Ebene P (hkl) zur Axenebene gewählt werden, und die Frage ist nun die, welches die Indices irgend einer Ebene Q (pqr) mit Bezug auf die neuen Axenrichtungen sein werden. Wir bezeichnen die Indices der Ebene Q für die neuen Axen einstweilen mit p', q', r' und denken uns zur Ermittlung ihrer Werthe die Ebenen T, P, Q parallel zu sich selbst so verschoben, dass sie sämmtlich die ursprüngliche Y Axe in demselben Punkte B schneiden. Wir haben alsdann für die Ebene P etwa die Parameter

$$OE = a\frac{k}{h},\quad OB = b,\quad OF = c\frac{k}{l} \quad\ldots\ldots\ldots (2)$$

für Q aber

$$OH = a\frac{q}{p},\quad OB = b,\quad OL = c\frac{q}{r} \quad\ldots\ldots\ldots (3)$$

die Durchschnitte der drei Ebenen P, (010), (001) oder EBF, XOZ, YOX schneiden sich aber in den Linien EX, EB, EF, und diess sind also unserer Annahme zufolge die neuen Axenrichtungen, auf welche der Komplex bezogen werden soll. Nennen wir M den Durchschnittspunkt der Linien AC und EF, so werden die neuen Axenrichtungen von der Ebene T in den Entfernungen

$$a' = EA,\quad b' = EB,\quad c' = EM \quad\ldots\ldots\ldots (4)$$

geschnitten, welche Linien ersichtlich die Längen der neuen Axen sein werden, da wir ja annehmen, dass nach wie vor die Axenlängen durch die Ebene T bestimmt werden. Ist ferner N der Durchschnittspunkt der Linien HL und EF, so sind EH, EB, EN die Parameter der Ebene Q mit Bezug auf das neue Axensystem und folglich

$$p' = \frac{a'}{EH} = \frac{EA}{EH},\quad q' = \frac{b'}{EB} = 1,\quad r' = \frac{c'}{EN} = \frac{EM}{EN} \quad\ldots (5)$$

Um nun die Grössen p' q' r' durch die ursprünglichen Indices der Ebenen P und Q auszudrücken, ziehen wir durch M und N Parallele mit OZ, welche also in der Ebene XOZ liegen und die Linie OX in zwei Punkten G und K schneiden werden. Alsdann finden wir aus ähnlichen Dreiecken leicht die folgenden Proportionen:

$$EM : EN = EG : EK = (EO + GO) : (EO + KO) \;.\; (6)$$

$$\left.\begin{aligned} GM : FO &= EG : EO = (EO + GO) : EO \\ GM : CO &= AG : AO = (AO + GO) : AO \end{aligned}\right\} \ldots (7)$$

$$\left.\begin{aligned} KN : LO &= HK : HO = (HO + KO) : HO \\ KN : FO &= EK : EO = (EO + KO) : EO \end{aligned}\right\} \ldots (8)$$

Aus den Proportionen (7) erhält man nun durch Elimination von GM

$$(9) \dots\dots OG = AO \,.\, EO \,.\, \frac{CO - FO}{AO \,.\, FO - CO \,.\, EO}$$

und ebenso aus den Proportionen (8) durch Elimination von KN

$$(10) \dots\dots OK = HO \,.\, EO \; \frac{LO - FO}{FO \,.\, HO - LO \,.\, EO}$$

Setzt man diese Werthe von OG und OK in die Proportion (6), so erhält man nach gehöriger Reduktion

$$(11)\; r' = \frac{EM}{EN} = \frac{CO}{LO} \,.\, \frac{AO - EO}{HO - EO} \,.\, \frac{FO \,.\, HO - EO \,.\, LO}{AO \,.\, FO - CO \,.\, EO}$$

für den Index p' hat man aber einfach

$$(12) \dots\dots p' = \frac{AE}{EH} = \frac{AO - EO}{HO - EO}$$

Ersetzt man nun in diesen Ausdrücken für p' und r' die einzelnen Linien durch ihre Werthe aus den Gleichungen (1), (2) und (3), so findet man

$$(13) \dots\dots \begin{cases} p' = \dfrac{p\,(h-k)}{hq - kp} \\ q' = 1 \\ r' = \dfrac{h-k}{h-l} \,.\, \dfrac{hr - lp}{hq - kp} \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen ersehen wir, dass unter der gemachten Annahme auch die neuen Indices der Ebene Q rationale Grössen sind. Was aber von der Ebene Q gilt, gilt offenbar auch von jeder anderen Ebene des betrachteten Komplexes, und wir haben somit bewiesen, dass, wenn ein Komplex von Ebenen für gewisse Axenebenen dem Gesetze der Rationalität der Indices gehorcht, diess auch noch dann stattfindet, wenn wir zu Axenebenen nur zwei der ursprünglichen und irgend eine andere Ebene des Komplexes wählen. Hiemit haben wir aber nach den Bemerkungen des vorhergehenden Paragraphes auch schon bewiesen, dass der angeführte Satz selbst dann noch gilt, wenn wir für alle drei ursprünglichen Axenebenen andere Ebenen des Komplexes dazu wählen. Man braucht, wie gesagt, um die Richtigkeit dieser Behauptung einzusehen, sich die Aenderung der Axenebenen nur successive ins Werk gesetzt denken.

Allein wir wollen doch die betreffenden Formeln auch für den Fall der Aenderung aller drei Axenebenen entwickeln, indem uns die-

selben für das Nachfolgende von Nutzen sein werden. Die Aufgabe ist also die, welches werden die Indices der Ebene Q (pqr) werden, wenn zu Axenebenen nicht mehr die Ebenen U (100), V (010), W (001), sondern die Ebenen P_1 $(h_1 k_1 l_1)$, P_2 $(h_2 k_2 l_2)$, P_3 $(h_3 k_3 l_3)$ gewählt werden, die Axenlängen aber immer durch dieselbe Ebene bestimmt werden? Lassen wir vorerst zwei Axenebenen V, W ungeändert, und wählen bloss statt der dritten U die Ebene P_1, zur Axenebene, so lehren uns die Gleichungen (13), dass für diese Axenebenen die Indices der Ebene Q werden

$$\left.\begin{aligned} p' &= p \\ q' &= \frac{-k_1 p + h_1 q}{-k_1 + h_1} \\ r' &= \frac{-l_1 p + h_1 r}{-l_1 + h_1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (14)$$

falls wir sie alle drei noch mit der Grösse $\frac{-k_1 p + k_1 q}{-k_1 + h_1}$ multipliciren, was ja gestattet ist. Aehnlich werden mit Bezug auf diese Axenebenen die Indices der Ebene P_2

$$\left.\begin{aligned} h_2' &= h_2 \\ k_2' &= \frac{-k_1 h_2 + h_1 k_2}{-k_1 + h_1} \\ l_2' &= \frac{-l_1 h_2 + h_1 l_2}{-l_1 + h_1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (15)$$

da ja die Gleichungen (14) für eine beliebige Ebene des Komplexes gelten müssen. Wir haben also jetzt als Axenebenen die Ebenen P_1, V, W und mit Bezug auf dieselben die Symbole Q $(p'q'r')$ und P_2 $(h_2' k_2' l_2')$. Ersetzen wir nun von diesen drei Axenebenen die Ebene V durch die Ebene P_2, so können wir um alsdann die Indices der Ebene Q zu bestimmen wieder die Formeln (13) anwenden; wir haben nur in denselben die folgende Vertauschung der Buchstaben vorzunehmen:

$$\begin{matrix} h_1 & k_1 & l_1 & p & q & r & p' & q' & r' \\ k_2' & h_2' & l_2' & q' & p' & r' & q'' & p'' & r'' \end{matrix}$$

wo p'', q'', r'' die neuen Indices der Ebene Q sind. Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} q'' &= q' \\ p'' &= \frac{-h'_2 q' + k'_2 p'}{-h_2' + k_2'} \quad \ldots\ldots\ldots (16) \\ r'' &= \frac{-l_2' q' + k_2' r'}{-l_2 + k_2} \end{aligned}$$

Setzt man in dem rechten Theile dieser Gleichungen für p', q', r' und h_2', k_2', l_2' ihre Werthe aus den Gleichungen (14) und (15), so erhält man nach gehöriger Reduktion

$$(17) \quad . \quad . \begin{cases} p'' = \dfrac{k_2 p - h_2 q}{k_2 - h_2} \\ q'' = \dfrac{-k_1 p + h_1 q}{-k_1 + h_1} \\ r'' = \dfrac{(k_1 l_2 - l_1 k_2) p + (l_1 h_2 - h_1 l_2) q + (h_1 k_2 - k_1 h_2) r}{k_1 l_2 - l_1 k_2 + l_1 h_2 - h_1 l_2 + h_1 k_2 - k_1 h_2} \end{cases}$$

Diese Gleichungen geben uns ersichtlich die Werthe der Indices von $Q(pqr)$, wenn von den Axenebenen zwei derselben $U(100)$, $V(010)$ durch die Ebenen $P_1(h_1 k_1 l_1)$ und $P_2(h_2 k_2 l_2)$ ersetzt werden. Es ist klar, dass uns diese Gleichungen durch ihre Form auch sogleich die Indices h_3'', k_3'', l_3'' angeben werden, welche die Ebene P_3 in Bezug auf diese neuen Axenebenen erhält. Es wird also sein

$$(18) \quad . \begin{cases} h_3'' = \dfrac{k_2 h_3 - h_2 k_3}{k_2 - h_2} \\ k_3'' = \dfrac{-k_1 h_3 + h_1 k_3}{-k_1 + h_1} \\ l_3'' = \dfrac{(k_1 l_2 - l_1 k_2) h_3 + (l_1 h_2 - h_1 l_2) k_3 + (h_1 k_2 - k_1 h_2) l_3}{k_1 l_2 - l_1 k_2 + l_1 h_2 - h_1 l_2 + h_1 k_2 - k_1 h_2} \end{cases}$$

Mit Bezug auf die Ebenen P_1, P_2, W haben wir die Symbole $Q(p''q''r'')$ und $P_3(h_3''k_3''l_3'')$; wenn wir daher statt der Ebene W die Ebene P_3 als Axenebene wählen, so werden wir die geänderten Indices p''', q''', r''' der Ebene Q mit Hilfe der Gleichungen (14) wieder finden, wenn wir in denselben nur die folgende Vertauschung der Buchstaben vollziehen:

$$\begin{matrix} h_1 & k_1 & l_1 & \quad p & q & r & \quad p' & q' & r' \\ l_3'' & k_3'' & h_3'' & \quad r'' & q'' & p'' & \quad r''' & q''' & p''' \end{matrix}$$

Wir finden alsdann

$$(19) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \begin{cases} r''' = r'' \\ q''' = \dfrac{-k_3'' r'' + l_3'' q''}{-k_3'' + l_3''} \\ p''' = \dfrac{-h_3'' r'' + l_3'' p''}{-h_3'' + l_3''} \end{cases}$$

Ersetzen wir in diesen Gleichungen nun p'', q'', r'' und h_3'', k_3'', l_3'' durch ihre Werthe aus den Gleichungen (17) und (18), so erhalten wir schliesslich

$$\left.\begin{aligned}
p''' &= \frac{(k_2l_3 - l_2k_3)\,p + (l_2h_3 - h_2l_3)\,q + (h_2k_3 - k_2h_3)r}{k_2l_3 - l_2k_3 + l_2h_3 - h_2l_3 + h_2k_3 - k_2h_3}\\
q''' &= \frac{(k_3l_1 - l_3k_1)\,p + (l_3h_1 - h_3l_1)\,q + (h_3k_1 - k_3h_1)r}{k_3l_1 - l_3k_1 + l_3h_1 - h_3l_1 + h_3k_1 - k_3h_1}\\
r''' &= \frac{(k_1l_2 - l_1k_2)\,p + (l_1h_2 - h_1l_2)\,q + (h_1k_2 - k_1h_2)r}{k_1l_2 - l_1k_2 + l_1h_2 - h_1l_2 + h_1k_2 - k_1h_2}
\end{aligned}\right\} \quad . \ (20)$$

Mit diesen Gleichungen ist unsere Aufgabe gelöst; sie geben uns nämlich die Indices einer Ebene $Q(pqr)$, wenn wir die ursprünglichen Axenebenen der Reihe nach durch die Ebenen $P_1(h_1k_1l_1)$, $P_2\,(h_2k_2l_2)$, $P_3\,(h_3k_3l_3)$ ersetzen. Wir sehen aus diesen Gleichungen auch, was wir übrigens schon voraus gewusst, dass, sobald nur die Indices dieser Ebenen rationale Grössen sind, es auch die Indices der Ebene Q für die geänderten Axenebenen sind.

Die Gleichungen (20) lassen sich in einer etwas einfacheren Form dadurch darstellen, dass man in denselben die Indices derjenigen Zonen einführt, denen die neuen Axenrichtungen parallel sind. Wir setzen also

$$\left.\begin{aligned}
[P_2P_3] &= [u_1v_1w_1] = [k_2l_3 - l_2k_3,\ l_2h_3 - h_2l_3,\ h_2k_3 - k_2h_3]\\
[P_3P_1] &= [u_2v_2w_2] = [k_3l_1 - l_3k_1,\ l_3h_1 - h_3l_1,\ h_3k_1 - k_3h_1]\\
[P_1P_2] &= [u_3v_3w_3] = [k_1l_2 - l_1k_2,\ l_1h_2 - h_1l_2,\ h_1k_2 - k_1h_2]
\end{aligned}\right\} . \ (21)$$

wodurch die Gleichungen (20) die folgende Form annehmen:

$$\left.\begin{aligned}
p''' &= \frac{u_1p + v_1q + w_1r}{u_1 + v_1 + w_1}\\
q''' &= \frac{u_2p + v_2q + w_2r}{u_2 + v_2 + w_2}\\
r''' &= \frac{u_3p + v_3q + w_3r}{u_3 + v_3 + w_3}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (22)$$

§. 13. Aenderung aller Ebenen, die ein Axensystem bestimmen.

Der Vollständigkeit halber wollen wir auch noch die Formeln für den Fall entwickeln, dass gleichzeitig nicht nur die Axenebenen, sondern auch die Ebene, welche die Axenlängen bestimmt, geändert werden. Die Aufgabe ist also jetzt folgende:

„Es sollen für eine Ebene $Q\ (pqr)$ die Werthe p_0, q_0, r_0 ihrer Indices gefunden werden, falls man die Axenlängen durch die Ebene $R(efg)$, die Axenrichtungen aber durch die Durchschnitte der Ebenen $P_1(h_1k_1l_1)$, $P_2(h_2k_2l_2)$, $P_3(h_3k_3l_3)$ bestimmt.

Wir setzen wie im vorhergehenden Paragraphe

$$[P_2P_3] = [(h_2k_2l_2)\,(h_3k_3l_3)] = [u_1v_1w_1]$$
$$[P_3P_1] = [(h_3k_3l_3)\,(h_1k_1l_1)] = [u_2v_2w_2]$$
$$[P_1P_2] = [(h_1k_1l_1)\,(h_2k_2l_2)] = [u_3v_3w_3]$$

Nehmen wir nun zuerst die Aenderung der Axenlängen vor, so geschieht diess dadurch, dass wir die Indices einfach der Reihe nach durch die Indices der Fläche R dividiren. Das Symbol der Fläche Q wird somit $\left(\frac{p}{e},\ \frac{q}{f},\ \frac{r}{g}\right)$. Dasselbe haben wir aber mit den Flächen P_1, P_2, P_3 zu thun. Hiedurch werden, wie man sich leicht mit Hilfe der Gleichungen (21) des vorhergehenden Paragraphes überzeugt, die Symbole der Zonen, welche als neue Axen gewählt werden sollen

$$[P_2P_3] = \left[\frac{u_1}{fg},\ \frac{v_1}{ge},\ \frac{w_1}{ef}\right]$$
$$[P_3P_1] = \left[\frac{u_2}{fg},\ \frac{v_2}{ge},\ \frac{w_2}{ef}\right]$$
$$[P_1P_2] = \left[\frac{u_3}{fg},\ \frac{v_3}{ge},\ \frac{w_3}{ef}\right]$$

Aendern wir aber jetzt auch die Axenrichtungen, so erhalten wir die Indices p_0, q_0, r_0 mit Hilfe der Gleichungen (22) des vorhergehenden Paragraphes, falls wir nur für die ursprünglichen Indices der Fläche Q und der Indices der zu den Axenrichtungen gewählten Zonen die richtigen Werthe setzen. Im gegenwärtigen Falle sind also in den Gleichungen (22) die Grössen p, q, r respektive durch e, f, g, die Indices der Zonen aber durch fg, ge, ef zu dividiren; diess gibt nach gehöriger Reduktion als Lösung unserer Aufgabe die Gleichungen:

$$p_0 = \frac{u_1p + v_1q + w_1r}{u_1e + v_1f + w_1g}$$
$$q_0 = \frac{u_2p + v_2q + w_2r}{u_2e + v_2f + w_2g}$$
$$r_0 = \frac{u_3p + v_3q + w_3r}{u_3e + v_3f + w_3g}$$

§. 14. Bedingung für die Indices von Ebenen, die auf derselben Seite einer gegebenen Zone liegen.

Berechnet man sich mittelst der im §. 11 angegebenen Regel die Indices einer Fläche Q, welche in zwei bekannten Zonen eines Krystalles liegt, so erhält man für dieselben, je nach der bei der Berechnung eingeschlagenen Ordnung, zwei Systeme von Werthen, die sich

jedoch nur durch gerade entgegengesetzte Vorzeichen unterscheiden, und die daher zwei parallelen Flächen zu beiden Seiten des Mittelpunktes entsprechen. In der That muss, wenn irgend eine Fläche in einer bestimmten Zone liegt, diess ja auch für jede ihr parallele Fläche der Fall sein.

Kommt es uns also nicht nur auf die Richtung der Fläche Q an, sondern soll auch ihre Lage an dem betrachteten Krystalle mit Bezug auf die beiden Seiten desselben bestimmt werden, so haben wir noch eine Untersuchung anzustellen, welches System von Werthen der durch die Zonenregel bestimmten Indices eigentlich zu nehmen sei. Diess zu entscheiden gelingt aber immer leicht, sobald die gegebenen Daten hinreichen, um den Satz, den wir jetzt beweisen werden, anwenden zu können.

Sind, Fig. 7, auf der Sphäre der Projektion (§. 6) P_1 und P_2 die Pole der Ebenen $(h_1k_1l_1)$ und $(h_2k_2l_2)$, und legt man durch diese zwei Pole und das Zentrum O der Sphäre eine Ebene, so wird letztere die Kugel in einem grössten Kreise K schneiden, und es wird für jede Ebene (efg), deren Pol in den Zonenkreis L fällt, die Gleichung

$$\mathrm{u}e + \mathrm{v}f + \mathrm{w}g = 0$$

bestehen müssen. Hiebei ist

$$\mathrm{u} = k_1l_2 - k_2l_1, \quad \mathrm{v} = l_1h_2 - h_1l_2, \quad \mathrm{w} = h_1k_2 - h_2k_1,$$

[uvw] also das Symbol der Zone P_1P_2. Die Indices jeder Ebene $Q(pqr)$ aber, deren Pol nicht in den Kreis K fällt, werden die frühere Gleichung nicht mehr erfüllen, sondern die Summe $\mathrm{u}p + \mathrm{v}q + \mathrm{w}r$ wird für dieselben entweder grösser oder kleiner als Null, d. h. entweder positiv oder negativ sein müssen.

Durch den Zonenkreis K wird die Sphäre in zwei gleiche Hälften getheilt. Für alle Ebenen nun, deren Pole auf derselben Seite des Kreises K liegen, wird der Ausdruck $\mathrm{u}p + \mathrm{v}q + \mathrm{w}r$ dasselbe Vorzeichen haben müssen. Um diess zu beweisen, wollen wir das Symbol der Ebene Q, welche uns eine beliebige Ebene vorstellt, deren Pol etwa rechts vom Zonenkreise K liegt, auf ein Axensystem beziehen, dessen ZAxe durch die Durchschnittslinie der zwei Ebenen P_1 und P_2 gebildet wird. Die ZAxe wird alsdann senkrecht stehen auf der Ebene des Kreises K, und wird parallel sein jeder Ebene, deren Pol in diesen Kreis entfällt. Lassen wir diese Axe, sowie die X und YAxe durch den Mittelpunkt O gehen, so ist leicht einzusehen, dass, was auch die Lage der letzteren zwei Axen sein mag, die Ebenen, deren Pole auf derselben

Seite des Kreises K liegen, die ZAxe auch auf derselben Seite vom Punkte O schneiden werden. Mit Bezug auf das neue Axensystem muss also der auf der ZAxe bezügliche Index der Ebene Q dasselbe Vorzeichen behalten, so lange nur ihr Pol immer auf derselben Seite des Kreises K bleibt. Sind p', q', r' die Indices von Q mit Bezug auf das neue Axensystem, dessen XZ und YZEbene durch P_1 und P_2 gebildet wird, so haben wir den allgemeinen Formeln (22) oder den speziellen Formeln (17) des §. 12 zufolge die Gleichungen

$$p' = \frac{k_2 p - h_2 q}{k_2 - h_2}$$

$$q' = \frac{-k_1 p + h_1 q}{-k_1 + h_1}$$

$$r' = \frac{\mathrm{u}p + \mathrm{v}q + \mathrm{w}r}{\mathrm{u} + \mathrm{v} + \mathrm{w}}$$

Da nun in dem Ausdrucke für r' der Nenner für alle Lagen der Ebene Q denselben Werth behält, so ist die Bedingung, dass r' sein Zeichen nicht ändere, einfach die, dass der Zähler dasselbe Vorzeichen behalte, und wir können somit den Satz aussprechen:

I. „Für alle Ebenen, deren Pole auf einer und derselben Seite des Zonenkreises [uvw] liegen, muss der Ausdruck $\mathrm{u}p + \mathrm{v}q + \mathrm{w}r$ dasselbe Vorzeichen haben, wenn p, q, r die jedesmaligen Indices dieser Ebenen bedeuten."

Aus diesem Satze lässt sich ferner mit Bezug auf das Vorzeichen der Indices eine Relation für drei tautozonale Ebenen ableiten.

Ist R der Pol einer mit P_1 und P_2 tautozonalen Ebene (efg), Fig. 7, so sagen wir, dass in dem Zonenkreise K die Pole P_1 und P_2 auf derselben Seite von R liegen, wenn die nach derselben Richtung gezählten Bögen RP_1 und RP_2 beide kleiner oder grösser als 180° sind; ist aber einer dieser Bögen grösser, der andere kleiner als 180°, so sagen wir, dass P_1 und P_2 auf entgegengesetzten Seiten des Poles R liegen. Ist nun Q der Pol einer beliebigen weiteren Ebene (pqr), so werden offenbar P_1 und P_2 auf derselben Seite des Zonenkreises RQ liegen müssen oder nicht, je nachdem sie sich auf derselben Seite oder auf entgegengesetzten Seiten des Poles R befinden. Dem vorhergehenden Satze zufolge werden daher die Ausdrücke

$$(fr - gq)\,h_1 + (gp - er)\,k_1 + (eq - fp)\,l_1$$
$$(fr - gq)\,h_2 + (gp - er)\,k_2 + (eq - fp)\,l_2$$

gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen haben, je nachdem die Pole P_1 und P_2 auf derselben Seite von R liegen oder nicht.

Hiebei ist die Lage des Poles Q insoferne gleichgiltig, als nur derselbe nicht ein Punkt des Zonenkreises K selbst ist, alsdann müsste ja jeder der vorhergehenden Ausdrücke gleich Null werden, was auch die Lage der tautozonalen Pole P_1, P_2, R sei. Ist also wie früher [uvw] das Symbol des Zonenkreises K, so haben wir bei der Wahl der Ebene Q nur zu untersuchen, ob ihre Indices p, q, r nicht vielleicht den Ausdruck

$$up + vq + wr$$

gleich Null machen, in welchem Falle eben Q eine Ebene der Zone K wäre. Diese Untersuchung können wir uns aber dadurch ersparen, dass wir zur Ebene Q die Ebene (uvw) wählen. Letztere kann nämlich nie in der Zone [uvw] liegen, indem der Ausdruck

$$uu + vv + ww = u^2 + v^2 + w^2$$

als eine Summe lauter positiver Grössen nicht gleich Null sein kann. Für diese Indices der Ebene Q wird nun der erste der früheren Ausdrücke

$$(fw - gv)\, h_1 + (gu - ew)\, k_1 + (ev - fu)\, l_1 =$$
$$= u\,(gk_1 - fl_1) + v\,(el_1 - gh_1) + w\,(fh_1 - ek_1).$$

Da aber P_1 und R ebenfalls Ebenen der Zone K sind, so muss nach §. 9

$$\frac{gk_1 - fl_1}{u} = \frac{el_1 - gh_1}{v} = \frac{fh_1 - ek_1}{w}$$

sein, demzufolge der vorhergehende Ausdruck übergeht in

$$(u^2 + v^2 + w^2)\, \frac{gk_1 - fl_1}{u}$$

Das Vorzeichen dieses Ausdruckes hängt aber bloss von $\frac{1}{u}\,(gk_1 - fl_1)$ ab, da ja der erste Faktor immer positiv sein muss. Ebenso erhalten wir für die Ebene P_2 den korrespondirenden Ausdruck $\frac{1}{u}\,(gk_2 - fl_2)$, der nun mit dem vorhergehenden gleiches oder entgegengesetztes Zeichen haben muss, je nachdem P_1 und P_2 auf derselben Seite des Poles R liegen oder nicht. Im ersteren Falle wird aber der Quotient dieser beiden Ausdrücke positiv, im zweiten negativ sein müssen. Wir haben also bloss das Vorzeichen des Ausdruckes

$$\frac{gk_1 - fl_1}{gk_2 - fl_2}$$

zu untersuchen. Hiebei kann es geschehen, dass dieser Ausdruck die

unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annimmt, ohne dass desshalb die Aufgabe aufhört, bestimmt zu sein. Es ist ja offenbar

$$\frac{gk_1 - fl_1}{gk_2 - fl_2} = \frac{el_1 - gh_1}{el_2 - gh_2} = \frac{fh_1 - ek_1}{fh_2 - ek_2}$$

und einer dieser Brüche muss immer bestimmt sein, indem ja nicht alle Indices einer Zone gleich Null sein können. Um also nicht nachträglich aufgehalten zu sein, ist es am besten, man berechnet sich gleich auf einmal alle diese drei Brüche, für welche Operation wir im §. 9 das Symbol $\left[\frac{RP_1}{RP_2}\right]$ eingeführt haben. Wir haben somit schliesslich den folgenden Satz:

II. „Sind P_1, P_2, R drei tautozonale Ebenen, so wird der Ausdruck $\left[\frac{RP_1}{RP_2}\right]$ positiv oder negativ sein, je nachdem die Pole von P_1 und P_2 auf derselben Seite von R liegen oder nicht."

§. 15. Beziehungen zwischen vier tautozonalen Krystallflächen.

Mit Hilfe der Entwicklungen der vorhergehenden Paragraphe ist es leicht, den folgenden Satz zu beweisen, der sich auf Flächen bezieht, die in einer und derselben Zone eines Krystalls liegen:

I. „Die Indices der Flächen einer Krystallzone ändern ihre Werthe nicht, sei es, dass man diese Flächen auf ein krystallographisches Axensystem, gebildet durch drei Flächen dieser Zone und einer andern Fläche des Krystalls, bezieht, sei es, dass man das Axensystem mittelst derselben drei tautozonalen Flächen und einer vierten beliebigen Ebene im Raume bestimmt, welches Axensystem alsdann kein krystallographisches mehr ist."

Um diesen Satz zu beweisen, bemerken wir vorerst, dass die Symbole der Flächen, welche das erste Axensystem bilden, mit Bezug auf dasselbe offenbar

$$P\,(100),\quad P'\,(010),\quad W\,(001),\quad Q\,(110)$$

sind, und dass irgend eine weitere Fläche der Zone $[PP'Q]$ das Symbol

$$R\,(pq0)$$

erhalten wird. Mit Bezug auf dasselbe Axensystem sei ferner

$$E\,(\alpha\beta\gamma)$$

das Symbol einer beliebigen Ebene im Raume, so dass also α, β, γ im Allgemeinen sich nicht wie drei rationale Grössen verhalten. Es frägt

ch nun, welches werden die Symbole der Flächen Q und R werden, enn wir etwa zur dritten Axenebene statt der Fläche W die Ebene E ählen. Wir erhalten aber die Symbole der Flächen Q und R mit ezug auf dieses neue Axensystem leicht mit Hilfe der Gleichungen (14) . 12, welche ja die für die Aenderung einer Axenebene giltigen Foreln sind. Setzen wir in denselben, wie es der gegenwärtige Fall errdert, für

$$h, k, l \quad p, q, r$$

r Reihe nach einmal

$$\gamma, \beta, \alpha \quad 0, 1, 1$$

ann

$$\gamma, \beta, \alpha \quad 0, p, q,$$

geben sie uns die Symbole

$$Q\left(\frac{\gamma}{\gamma-\alpha}, \frac{\gamma}{\gamma-\beta}, 0\right)$$

$$R\left(\frac{\gamma p}{\gamma-\alpha}, \frac{\gamma q}{\gamma-\beta}, 0\right)$$

Das neue Axensystem muss aber, wie der aufgestellte Satz forrt, so beschaffen sein, dass für dasselbe Q das Symbol (110) bemmt, indem diese Fläche ja immer die Axenlängen bestimmen soll. ir haben daher noch die Axenlängen so zu ändern, dass die Fläche Q rklich das Symbol (110) erhält. Diess geschieht nach der im §. 11 wiesenen Regel einfach dadurch, dass wir die Indices aller Flächen : Reihe nach durch die Indices der Fläche Q dividiren. Die vorherienden Symbole von Q und R werden hiedurch

$$Q\ (110),\ R\ (pq0);$$

Symbole der Flächen P, P' und der Ebene E, welche jetzt die lices 0, 0, 1 hat, ändern sich hierbei nicht. Man sieht aber, dass R 1 wirklich wieder dieselben Indices wie für das erste Axensystem , und da R eine beliebige Fläche der Zone $[PP']$ vorstellt, so ist rmit der aufgestellte Satz ganz allgemein bewiesen.

Zur grösseren Deutlichkeit wollen wir aber diesen Satz noch ekt, ohne Zuhilfenahme der Regeln über die Transformation der ensysteme beweisen. Es seien in Fig. 8 — OX, OY, OZ die Durchnitte der Flächen P, P', W, ferner OA, OB, ∞ und OA', OB, ∞ Abschnitte der Flächen Q und R auf den Richtungen OX, OY, Z; die Flächen Q und R liegen alsdann wirklich in der Zone $[PP']$ parallel zu sich verschoben, dass beide die Richtung OY

in demselben Punkte schneiden. Die beliebige Ebene E schneide m die Flächen P und P in den Linien ox und oy; um dann die Abschnitte der Flächen Q und R auf diesen Linien zu finden, braucht m nur die Durchschnittslinien von P und P' mit Q und R zu konstruir Diese vier Flächen schneiden sich aber, da sie in einer und derselb Zone liegen, in lauter parallelen Linien; zieht man daher durch A, A', Parallele mit OZ, so geben uns die Durchschnittspunkte a, a', b die Linien mit den Richtungen ox und oy die gesuchten Abschnitte d Flächen Q und R auf eben diesen Richtungen.

Die Indices der Fläche R werden nun für das durch die Fläch P, P', W, Q bestimmte krystallographische Axensystem offenbar

$$\frac{OA}{OA'}, \ \frac{OB}{OB'} = 1, 0,$$

während sie für das durch P, P', E, Q gebildete Axensystem

$$\frac{oa}{oa'}, \ \frac{ob}{ob'} = 1, \ 0$$

sind. Es lässt sich nun leicht zeigen, dass

$$\frac{oa}{oa'} = \frac{0A}{0A'}$$

denn ist etwa m der Durchschnittspunkt der Linien ox und OX, so hat man in Folge der parallelen Linien die ähnlichen Dreiecke

$$\Delta \ A'a'm \sim \Delta \ Aam \sim \Delta \ Oom,$$

aus welchen sich leicht die frühere Gleichung ergibt, welche den Beweis des aufgestellten Satzes enthält; die drei Indices der Fläche R sind also wirklich für beide Axensysteme dieselben.

Dadurch, dass die Indices der tautozonalen Flächen für beide Axensysteme denselben Werth haben, also für beide rationale Grösse sind, ist es klar, dass der eben bewiesene Satz auch den folgenden i sich schliesst:

„Das Gesetz der Rationalität der Indices gilt für die Fläche einer und derselben Krystallzone auch dann noch, wenn man dieselb auf ein Axensystem gebildet durch drei Flächen dieser Zone und ein weitere beliebige Ebene bezieht.“

Sind die Indices der Fläche R wie früher p, q, 0, so hat man fü diese Fläche die beiden Symbole $(pq0)$ und $\left(\frac{oa}{oa'}, 1, 0\right)$ welche offenbar durch Multiplikation mit einer bestimmten Grösse K in einande übergehen müssen. Wir haben also

$$\frac{oa}{oa'}K = p, \quad 1.K = q$$

woraus sich sogleich

$$\frac{oa}{oa'} = \frac{p}{q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

ergibt, auf welche Gleichung man auch dadurch geführt wird, dass man in beiden Symbolen den ersten Index gleich eins macht. Die Linie oa' ist offenbar mit negativen Zeichen zu nehmen, sobald der Punkt a' auf der entgegengesetzten Seite des Punktes o liegt als der Punkt a.

Die letzte Gleichung gibt uns nun eine Beziehung zwischen der Lage von vier tautozonalen Flächen und ihren Indices. Die Linien oa und oa' hängen ja, da die Ebene E willkürlich ist, nur von den Richtungen der vier tautozonalen Flächen ab. Letztere müssen aber die Symbole (100), (010), 110) und ($pq0$) haben. Es ist auch leicht anzugeben, welche Gestalt diese Gleichung annimmt für den Fall, dass die Symbole der vier tautozonalen Flächen (010), (001), (011), ($0qr$) oder (001), (100), (101), ($p0r$) sind, denn der Symmetrie unserer Bezeichnung zufolge muss offenbar im ersteren Falle

$$\frac{oa}{oa'} = \frac{q}{r},$$

im zweiten aber

$$\frac{oa}{oa'} = \frac{r}{p}$$

sein. Allein von grösserem Interesse für uns ist es, die Form dieser Gleichung für den allgemeinen Fall beliebiger, jedoch tautozonalen Flächen entsprechender Symbole anzugeben.

Es seien also etwa die Symbole der vier Flächen

$$P\,(hkl),\ P'\,(h'k'l'),\ Q\,(efg),\ R\,(uvw),$$

und da dieselben tautozonal sein sollen, so muss offenbar

$$\left.\begin{array}{l}(kl' - lk')e + (lh' - hl')f + (hk' - kl')g = 0\\ (kl' - lk')u + (lh' - hl')v + (hk' - kl')w = 0\end{array}\right\} \quad . \; . \; (2)$$

sein. Wir transformiren nun vorerst die Axen so, dass die Flächen P und P' die Symbole (100) und (010) erhalten; die Symbole der Flächen Q und R werden alsdann zufolge der Gleichungen (17) des §. 12 und mit Berücksichtigung der vorstehenden Gleichungen

$$Q\left(\frac{k'e - h'f}{k' - h'}, \frac{-ke + hf}{-k + h}, 0\right)$$
$$R\left(\frac{k'u - h'v}{k' - h'}, \frac{-ku + hv}{-k + h}, 0\right)$$

Nachdem die Axenrichtungen transformirt, ändern wir die Längen der Axen so, dass die zwei ersten Indices der Fläche Q gleich eins werden. Die neuen Symbole der übrigen Flächen erhält man alsdann nach der im §. 11 gegebenen Regel einfach dadurch, dass man die Indices jeder Fläche durch die entsprechenden Indices der Fläche Q dividirt. Man erhält auf diese Weise

$$P\,(100),\ P'\,(010),\ Q\,(110)$$
$$R\left(\frac{k'u - h'v}{k'e - h'f}, \frac{-ku + hv}{-ke + hf}, 0\right)$$

und die Symbole der vier Flächen haben nun die Form, welche wir beim Beweise des Satzes I vorausgesetzt haben, und zwar ist

$$p = \frac{k'u - h'v}{k'e - h'f},\ q = \frac{-ku + hv}{-ke + hf}$$

somit

$$(3) \ldots\ldots \frac{oa}{oa'} = \frac{k'u - h'v}{ku - hv} \times \frac{ke - hf}{k'e - h'f}$$

Dem rechten Theile dieser Gleichung können wir aber verschiedene Formen ertheilen, wenn wir bedenken, dass da sowohl P, P', Q, als auch P, P', R tautozonal sind, dem §. 9 zufolge folgende Gleichungen bestehen müssen:

$$(4)\ .\ \begin{cases} \left[\dfrac{QP}{QP'}\right] = \dfrac{fl - gk}{fl' - gk'} = \dfrac{gh - el}{gh' - el'} = \dfrac{ek - fh}{ek' - fh'} \\ \left[\dfrac{RP'}{RP}\right] = \dfrac{vl' - wk'}{vl - wk} = \dfrac{wh' - ul'}{wh - ul} = \dfrac{uk' - vk'}{uk - vh} \end{cases},$$

Ersetzen wir also die Brüche der Gleichung (3) gleichzeitig durch ihre vorhergehenden Werthe aus den Gleichungen (4), so erhalten wir $\frac{oa}{oa'}$ noch in zwei anderen Formen, auf welche wir in der That auch dadurch geführt worden wären, dass wir die Flächen P und P' statt zu den Axenebenen (100) und (010) zu den Axenebenen (010) und (001) oder zu (001) und (100) gewählt hätten. Es ist diese Bemerkung insoferne von Wichtigkeit, als die Brüche in Gleichung (3) für bestimmte Zahlenwerthe der Indices die Form $\frac{0}{0}$ annehmen können, wodurch scheinbar $\frac{oa}{oa'}$

unbestimmt würde. In einem solchen Falle geben uns die anderen gleichwerthigen Brüche der Gleichungen (4) den wahren Werth von $\frac{oa}{oa'}$. Wir werden aber bei der Berechnung dieses Werthes nie in die erwähnte Verlegenheit gerathen, wenn wir, statt die Brüche einzeln für sich zu berechnen, gleich die ganzen durch die Symbole $\left[\frac{QP}{QP'}\right]$ und $\left[\frac{RP'}{RP}\right]$ angedeuteten Operationen vornehmen; die Gleichungen (3) und (4) geben uns ja die symbolische Gleichung

$$\frac{oa}{oa'} = \left[\frac{QP}{QP'}\right] \cdot \left[\frac{RP'}{RP}\right] \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Wir können somit schliesslich den folgenden Satz aussprechen:

II. „Sind oP, oP', oQ und oR (Fig. 9) die Durchschnittslinien der vier tautozonalen Flächen P (hkl), P' ($h'k'l'$), Q (efg), R (uvw) mit einer beliebigen Ebene im Raume und zieht man durch den beliebigen Punkt b der Linie oP Parallele mit oQ und oR, welche die Linie oP' in den Punkten a und a' schneiden, so ist

$$\frac{oa}{oa'} = \left[\frac{QP}{QP'}\right] \times \left[\frac{RP'}{RP}\right]$$

wobei oa' negativ zu nehmen, falls der Punkt a' auf der entgegengesetzten Seite vom Punkte o liegt, wie der Punkt a."

Dieser wichtige Satz lässt sich noch in einer anderen Form geben, in welcher auch die geometrische Konstruktion symmetrisch mit Bezug auf alle vier Flächen ist.

Wir ziehen zu diesem Zwecke (Fig. 10), wenn wie früher oP, oP', oQ, oR die Durchschnitte der vier tautozonalen Flächen P, P', Q, R mit einer beliebigen Ebene E sind, durch den beliebigen Punkt p in der Linie oP eine Gerade, welche die anderen Linien in den Punkten p', q, r trifft, zu gleicher Zeit aber auch durch den Punkt p Parallele oQ_1 und oR_1 mit OQ und OR, welche die Linie OP' etwa in den Punkten a und a' schneiden. Dem letzten Satze zufolge ist dann offenbar

$$\frac{oa}{oa'} = \left[\frac{QP}{QP'}\right] \cdot \left[\frac{RP'}{RP}\right] \quad \ldots \ldots \quad (5a)$$

wegen der parallelen Linien aber auch

$$\Delta\, op'q \sim \Delta\, p'pa$$
$$\Delta\, op'r \sim \Delta\, pp'a'$$

woraus man sogleich die folgenden Proportionee erhält

$$pp' : p'q = p'a : op'$$
$$pp' : p'r = p'a' : op'.$$

In jeder Proportion verhält sich aber die Summe des ersten und zweiten Gliedes zur Summe des dritten und vierten, sowie das zweite Glied zum vierten; aus den vorstehenden Proportionen ergeben sich daher die neuen

$$qp : oa = qp' : op'$$
$$rp : oa' = rp' : op'$$

und hieraus durch Elimination von op'

$$(6) \ldots \ldots \quad \frac{oa}{oa'} = \frac{qp}{qp'} \cdot \frac{rp'}{rp}$$

Setzt man in dieser Gleichung für $\frac{oa}{oa'}$ seinen Werth aus Gleichung (5a), so wird schliesslich

$$(7) \ldots \quad \frac{qp}{qp'} : \frac{rp}{rp'} = \left[\frac{QP}{QP'}\right] \cdot \left[\frac{RP'}{RP}\right]$$

Man nennt aber das Verhältnis

$$\frac{qp}{qp'} : \frac{rp}{rp'} = \frac{qp}{qp'} \cdot \frac{rp'}{rp}$$

das anharmonische Verhältnis der Ebenen Q und R zu den Ebenen P und P'. Dasselbe ist für je vier Ebenen, ob dieselben Krystallflächen sind oder nicht, unabhängig von der Lage der Ebene E und von der Richtung der Linie pr in dieser Ebene; der Werth dieses Verhältnisses lässt sich ja, wie Gleichung (7) lehrt, bloss durch die Indices der vier Ebenen ausdrücken, welche ja mit Beziehung auf die Ebene E und die Linie pr konstante Grössen sind, auch wenn sie nicht rational wären. Die Linie pr kann also eine ganz beliebige Richtung im Raume haben, ohne dass der Werth des anharmonischen Verhältnisses hiedurch geändert würde. Mit Bezug auf vier Krystallflächen hat man aber für dieses Verhältnis dem Vorhergehenden zufolge den nachstehenden Satz:

III. „Sind P, P', Q, R die Symbole von vier tautozonalen Krystallflächen, so muss das anharmonische Verhältnis der Flächen Q und R zu den Flächen P und P' rational, und zwar $= \left[\frac{QP}{QP'}\right] : \left[\frac{RP}{RP'}\right]$ sein."

Die Sätze II und III geben uns nun ersichtlich eine Beziehung zwischen der Lage von vier tautozonalen Krystallflächen und den Indices derselben. Diese Beziehung wird besonders in einem Falle sehr deutlich, wenn wir nämlich die beliebige Ebene E senkrecht zu den tautozonalen

Flächen wählen. In diesem Falle sind in den Figuren 9 und 10 die Winkel

$$PoP', \ PoQ = PbQ_1, \ PoR = PbR_1$$

nichts anderes als die Neigungswinkel

$$PP', \ PQ, \ PR$$

der vier tautozonalen Flächen P, P', Q und R. Es geht diess ganz klar aus der Betrachtung der Fig. 8 hervor, denn ist in derselben oZ, die Zonenaxe der vier tautozonalen Flächen, senkrecht zur Ebene E, so sind es auch die dazu parallelen Linien, daher die Winkel yoZ, Zox, obB, abB, $a'bB$ lauter rechte, und die Winkel aob, oba, oba' wirklich nichts anderes als die obigen Neigungswinkel der tautozonalen Flächen.

Nehmen wir also die Ebene E senkrecht zu den tautozonalen Flächen, so geht der Satz II in den nachfolgenden über, von dem wir mehrfache Anwendungen machen werden.

IV. „Sind P, P', Q, R die Symbole von vier tautozonalen Flächen, PP', PQ, PR aber die nach einer und derselben Richtung gezählten äusseren oder inneren Neigungswinkel derselben, und konstruirt man sich (Fig. 11) auf einer und derselben Seite der Linie oP und mit dem beliebigen Punkte b derselben die Winkel

$$PoP = PP', \ PbQ = PQ, \ PbR = PR$$

so ist

$$\frac{oa}{oa'} = \left[\frac{QP}{QP'}\right] \cdot \left[\frac{RP'}{RP}\right]$$

wo oa und oa' die Entfernung des Punktes o von den Durchschnittspunkten a und a' der Linien bQ und bR mit oP' sind, und oa' mit negativem Vorzeichen zu nehmen ist, wenn a' auf entgegengesetzter Seite vom Punkte o liegt wie a."

Diese Beziehung zwischen den Winkeln und Indices von vier Flächen einer Krystallzone kann uns nun ersichtlich dazu dienen, eine dieser Grössen aus den anderen zu berechnen, also entweder einen der drei Neigungswinkel oder das Symbol einer der vier tautozonalen Flächen aus den anderen Grössen zu bestimmen. Die Indices einer Fläche, welche in einer gegebenen Zone liegen soll, stellen ja auch nur eine unbekannte Grösse vor, zu deren Bestimmung somit eine einzige Relation hinreicht. Wir werden diese beiden Probleme im nächsten Paragraphe noch näher ins Auge fassen. So viel ist aber schon jetzt klar, dass die Lage aller in einer Zone möglichen Flächen gegeben ist, sobald man nur die Lage dreier Flächen derselben kennt. Ertheilt man

nämlich diesen drei Flächen P, P', Q beliebige, jedoch tautozonalen Flächen entsprechende Indices, so kann man hieraus das Symbol der Zone und somit die Indices jeder in dieser Zone möglichen Fläche angeben; mit Hilfe dieser Indices wird man aber nun für jede solche mögliche Fläche R aus den Winkeln und Indices der Flächen P, P', Q die Neigung der Fläche R zu einer der anderen Flächen bestimmen können, wodurch die Lage der Fläche R gegeben ist.

Drei tautozonale Flächen bilden nur zwei von einander unabhängige Winkel, drücken wir dieselben mit Bezug auf irgend ein Axensystem durch die Indices und Elemente aus, so werden wir dadurch, dass wir den beiden Winkeln bestimmte Werthe, etwa φ und ψ, ertheilen, den Elementen nur zwei Bedingungen auferlegen. Damit also irgend eine mögliche Zone, welche immer durch drei ihrer Flächen gegeben ist, an einem Krystalle vorkomme, müssen die Elemente zwei Bedingungen erfüllen, woraus andererseits auch hervorgeht, dass sobald eine Zone überhaupt nur möglich ist, auch Krystalle möglich sind, an denen diese Zone auftritt. Ja man wird auch folgenden Satz aussprechen können:

V. „Ist eine bestimmte Zone überhaupt an Krystallen möglich, so sind auch Krystalle möglich, die diese Zone und noch eine Fläche enthalten, welche mit zwei Flächen dieser Zone gegebene Winkel bildet.“

Durch eine bestimmte Zone werden, wie wir gesehen, die Elemente eines Krystalles nur zwei Bedingungen unterworfen, ebenso durch den Umstand, dass zwei Flächen dieser Zone gewisse Winkel mit einer anderen Fläche bilden sollen; es gibt diess im Ganzen vier Bedingungen für die Elemente, welche also dadurch noch nicht einmal vollständig bestimmt sind. Es ist daher wirklich eine ganze Klasse von Krystallen möglich, die dem angeführten Satze entsprechen. Die Fläche, welche mit zwei Flächen einer Zone bestimmte Winkel bildet, ist natürlich durch diesen Umstand ihrer Lage nach vollkommen bestimmt.

Aus dem Gesagten ergibt sich also, dass man den Winkeln, welche drei tautozonale Flächen mit einander bilden, beliebige Werthe ertheilen kann, ohne dass diese Flächen aufhören werden, mögliche Flächen irgend eines Krystalles zu sein, und zwar sind durch diesen Umstand die Elemente des betreffenden Krystalles nur zwei Bedingungen unterworfen. Das letztere findet auch dann noch statt, wenn wir Winkeln, welche mehr als drei tautozonale Flächen miteinander bilden, specielle Werthe ertheilen; es entsteht aber dann die Frage, ob denn diese Winkelwerthe überhaupt an Krystallen möglich sind, d. h. ob die Indices der Ebenen, welche sich unter den gegebenen Winkeln schneiden

sollen, alsdann wirklich rationale Grössen sein können. Wir werden also drei dieser Ebenen beliebige Symbole ertheilen, und dann für jede weitere, in Betracht kommende Ebene die Rationalität ihrer Indices noch zu beweisen haben, indem wir letztere entweder mit Hilfe der Indices der drei ersteren Ebenen bestimmen, oder aber, indem wir nachweisen, dass das anharmonische Verhältnis jeder Ebene mit den drei ersteren ein rationales ist. Da nämlich diess Verhältnis, sowie das Zonensymbol nur von den Indices der vier Ebenen abhängt, so müssen auch die Indices der vierten Ebene, die sich ja aus diesen beiden Grössen berechnen lassen, alsdann rationale Grössen sein.

§. 16. Aufgaben, vier tautozonale Flächen betreffend.

Wir wollen jetzt die zu Ende des vorigen Paragraphes angedeuteten Probleme näher betrachten und mit Bezug auf die Neigungswinkel und Indices der vier tautozonalen Flächen P, P', Q, R zeigen, welche Operationen man auszuführen hat, um entweder einen der Neigungswinkel oder eines der Flächensymbole mit Hilfe der anderen Grössen zu bestimmen. Was den ersten Fall betrifft, so ist der zur Lösung dieser Aufgabe führende Weg offenbar der, dass man sich aus Gleichung (5) des vorhergehenden Paragraphes zuerst $\frac{oa}{oa'}$ bestimmt, wobei der Winkel PR als unbekannt vorausgesetzt ist; mit Hilfe dieser Grössen und der bekannten Neigungen PP' und PQ kann man sich dann mit einer beliebigen Länge ob leicht die Dreiecke bao und $ba'o$ konstruiren, Fig. 11, im letzteren Dreiecke ist aber der Winkel $ba'o$ offenbar der gesuchte Neigungswinkel PQ.

Was die umgekehrte Aufgabe betrifft, die Indices einer der vier tautozonalen Flächen, etwa die von R zu bestimmen, so wird man sich zuerst mit Hilfe der gegebenen Neigungswinkel PP', PQ, PR und einer beliebigen Länge ob die Dreiecke bao und $ba'o$ konstruiren und in denselben den numerischen Werth des Verhältnisses der Seiten oa und oa' bestimmen. Für dieses Verhältnis hat man aber zufolge Gleichung (5)

$$\frac{oa}{oa'} = \left[\frac{QP}{QP'}\right] \cdot \left[\frac{RP'}{RP}\right]$$

woraus, wenn wir zur Abkürzung

$$n = \frac{oa'}{oa} \left[\frac{QP}{QP'}\right] \quad \dots\dots\dots (8)$$

setzen, die Gleichung

$$(9) \quad . \quad . n = \left[\frac{RP}{RP'}\right] = \frac{vl - wk}{vl' - wk'} = \frac{wh - ul}{wh' - ul'} = \frac{uk - vh}{uk' - vh'}$$

folgt. Wie diese Gleichung lehrt, muss n eine rationale ganze oder gebrochene Zahl sein, deren Werth wir aus Gleichung (8) mittelst des durch die Konstruktion bestimmten Verhältnisses $\frac{oa}{oa'}$ und der Grösse $\left[\frac{QP}{QP'}\right]$, welche nur die bekannten Indices der Flächen P, P', Q enthält, finden können. Der so durch die Messung der Linien oa und oa' ermittelte Werth von n wird aber im Allgemeinen nicht rational sein, da wir ja Beobachtungen irgend welcher Grössen niemals mit absoluter Genauigkeit anstellen können. Allein bei dem Umstande, dass für die Indices, und nach Gleichung (9) also auch für n, grosse Zahlenwerthe der Erfahrung gemäss ausgeschlossen sind, werden wir auch bei nicht ganz genauer Messung der Linien oa und oa' immer erkennen, welchem rationalen Zahlenwerthe sich die Grösse n nähert und welches somit der wahre Werth von n ist; ja diess wird sogar selbst dann noch stattfinden, wenn wir auch für die zur Konstruktion von oa und oa' nöthigen Neigungswinkel PP', PQ, PR nicht die ganz genauen Werthe kennen, sondern dafür nur Näherungswerthe besitzen.

Aus Gleichung (9) erhalten wir nun

$$\frac{u}{w} = \frac{h - h'n}{l - l'n}, \quad \frac{v}{w} = \frac{k - k'n}{l - l'n}$$

und diese zwei Gleichungen bestimmen uns also die gesuchten Indices der Fläche R. Setzt man den Index w gleich $l - l'n$, so hat man schliesslich

$$(10) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} u = \pm (h - h'n) \\ v = \pm (k - k'n) \\ w = \pm (l - l'n) \end{cases}$$

Wir wollen zum Schlusse die zwei Aufgaben für vier tautozonale Flächen nochmals mit ihren Auflösungen zusammenstellen. Diese Aufgaben erheischen mechanische Konstruktionen. Ueber die Ausführung derselben mit den Hilfsmitteln des Zeichnens, welch' letztere wir bei Gelegenheit der Projektion der Krystallgestalten näher betrachten wollen, bemerken wir hier nur so viel, dass man sich zur Messung der Linien einer beliebigen Längeneinheit, zur Messung der Winkel aber

eines sogenannten Transporteurs zu bedienen hat, mit Hilfe dessen man auch die im Gradmasse gegebenen Winkel in die Zeichnung einträgt.

Noch ist zu bemerken, dass die Gleichungen (10) die Fläche R insoferne nicht ganz bestimmen, als sie uns noch die Wahl zwischen zwei gerade entgegengesetzten Flächen lassen. Um nämlich die Indices in die Form (10) zu bringen, haben wir dieselben mit verschiedenen Grössen multiplizirt; ist aber unter diesen Grössen eine negative, so werden durch die Multiplikation mit derselben die Zeichen von u, v, w in die entgegengesetzten umgeändert worden sein und die Gleichungen (10) werden uns dann eigentlich die zu R parallele, entgegengesetzte Fläche geben. Es ist aber in jedem speziellen Falle meist allsogleich leicht zu entscheiden, ob man die Vorzeichen der aus (10) bestimmten Indices in die entgegengesetzten zu verwandeln hat, da man ja bloss zwischen zwei parallelen Flächen zu wählen hat; mit Hilfe des §. 14 können wir diese Frage jedoch auch immer strenge lösen.

1. Aufgabe: Aus den Indices von vier Flächen einer Krystallzone und aus den Winkeln zwischen drei dieser Flächen die Neigung der letzteren zur vierten Fläche zu finden.

Auflösung: Sind die Symbole der vier tautozonalen Flächen

$$P\,(hkl),\ P'\,(h'k'l'),\ Q\,(efg),\ R\,(uvw)$$

und sind

$$PP',\ PQ,\ PR = ?$$

die nach derselben Richtung gezählten Neigungswinkel der Flächen P, P', Q, R, von welchen Winkeln die zwei ersten ihrer Grösse nach gegeben sind, der dritte aber mit Hilfe der anderen bestimmt werden soll, so konstruire man Fig. 11 auf einer und derselben Seite der Linie oP die Winkel

$$PoP' = PP',\ PbQ = PQ$$

wo b ein beliebiger Punkt der Linie oP und a der Durchschnittspunkt der Linien oP' und bQ ist. Man bestimme alsdann auf der Linie oP' oder deren Verlängerung den Punkt a', für welchen

$$oa' = oa\left[\frac{QP'}{QP}\right]\cdot\left[\frac{RP}{RP'}\right]$$

wobei der Punkt a' auf derselben Seite vom Punkte o wie der Punkt a zu nehmen ist oder nicht, je nachdem aus dieser Gleichung ein positiver oder negativer Werth von oa' resultirt. Verbindet man schliesslich

noch a' mit b, so ist der Winkel

$$a'bP = PR$$

womit die gestellte Aufgabe gelöst ist.

Beispiel. Für die drei tautozonalen Flächen (110), (241), (021) des Idokras hat man die äusseren Neigungswinkel

$$(110)\,(241) = 28^0\,51', \quad (110)\,(021) = 58^0\,49'$$

In derselben Zone liegt aber auch die Fläche (131), deren Neigung zu (110) mit Hilfe der früheren Aufgabe gefunden werden soll. Setzt man

$$P\,(110), \quad P'\,(241), \quad Q\,(021), \quad R\,(131)$$

so hat man in diesem Falle

$$oa' = oa\left[\frac{\bar{2}, 2, \bar{4}}{\bar{1}, 1, \bar{2}}\right] = \left[\frac{\bar{1}, 1, \bar{2}}{\bar{1}, 1, \bar{2}}\right] = oa\,.\,2\,.\,1 = 2\,.\,oa$$

und wenn man mit dieser Grösse die angegebene Konstruktion ausführt, so wird man finden, dass nahezu

$$PR = (110)\,(131) = 39^0\,34'$$

2. Aufgabe: Aus den Winkeln, welche vier tautozonale Flächen unter einander bilden, und aus den Indices dreier dieser Flächen die Indices der vierten zu finden.

Auflösung. Sind die Symbole der vier tautozonalen Flächen

$$P\,(hkl), \quad P'\,(h'k'l'), \quad Q\,(efg), \quad R\,(?)$$

und

$$PP', \; PQ, \; PR$$

die nach einer und derselben Richtung gezählten Neigungswinkel dieser Flächen, so konstruire man sich, Fig. 11, auf einer und derselben Seite der Linie oP und mit dem beliebigen Punkte b auf derselben die Winkel

$$PoP' = PP', \quad PbQ = PQ, \quad PbR = PR$$

Man messe nun mit einer beliebigen Einheit die Längen von oa und oa', wo a und a' die Durchschnittspunkte der Linien bQ und bR mit oP' sind; hiebei ist die für oa' gefundene Zahl mit positiven oder negativen Vorzeichen zu nehmen, je nachdem der Punkt a auf derselben Seite vom Punkte o liegt wie a oder nicht. Mit Hilfe dieser so bestimmten Grössen suche man nun für n einen rationalen ganzen oder gebrochenen Werth, welcher die Gleichung

$$n = \frac{oa'}{oa}\left[\frac{QP}{QP'}\right]$$

möglichst genau erfüllt. Alsdann sind die Indices der Fläche R gegeben durch die Gleichungen

$$u = \pm (h - h'n)$$
$$v = \pm (k - k'n)$$
$$w = \pm (l - l'n)$$

wo den gegebenen Winkeln entsprechend, nach Satz II, §. 14 entweder sämmtlich die oberen oder sämmtlich die unteren Zeichen zu wählen sind.

Beispiel: Für Bleivitriol machen die Flächen (201), (421), (110) und die mit ihnen tautozonale Fläche ζ die nach derselben Richtung gezählten Winkel

$$(201)\,(421) = 34^0\,49', \quad (201)\,(110) = 61^0\,44'$$
$$(201)\,\zeta = 84^0 \text{ ungefähr.}$$

Indem $P = (201)$, $P' = (421)$, $Q = (110)$, $R = \zeta$ gesetzt wurde, ergab die Ausführung der angegebenen Konstruktion $oa = 94{\cdot}5$, $oa' = 63$, wo beide Längen mittelst eines Millimetermasstabes gemessen sind. Dadurch wurde

$$n = \frac{63}{94{\cdot}5}\left[\frac{1,\,\bar{1},\,2}{1,\,\bar{1},\,2}\right] = \frac{63}{94{\cdot}5} \times 1 = 0{\cdot}6682;$$

der richtige Werth von n ist daher offenbar $^2/_3 = 0{\cdot}6666$, woraus man $u = \pm(-\,^2/_3)$, $v = \pm(-\,^4/_3)$, $w = \pm\,^1/_3$ erhält. Da in diesem Falle die unteren Zeichen zu nehmen sind, so hat man schliesslich für ζ das Symbol $(24\bar{1})$.

Mit Hilfe des letzten Symbols kann man sich nun den wahren Werth des Winkels (201) ζ verschaffen; es geschieht diess durch Anwendung der Lösung der ersten Aufgabe, wodurch man in diesem Falle

$$(201)\,(24\bar{1}) = 85^0\,0'$$

erhält.

3. Kapitel.

Ueber Krystallflächen, die isoschematisch mit Bezug auf sich selbst sind.

§. 17. Isoschematische Ebenen.

Wir nennen zwei Ebenen isoschematisch mit Bezug auf eine dritte Ebene, wenn dieselben mit letzterer tautozonal sind und mit ihr gleiche Winkel bilden. Der folgende Satz ist hiernach unmittelbar klar:

I. „Je zwei Ebenen sind isoschematisch mit Bezug auf zwei zu einander senkrechte Ebenen, welche die beiden Neigungswinkel der ersteren Ebenen halbiren.“

Halbirt nämlich eine Ebene den Neigungswinkel zweier anderer Ebenen, so muss sie ja mit letzterer in einer Zone liegen und zu beiden gleich geneigt sein. Nehmen wir an, dass die Ebenen P und P' isoschematisch sind mit Bezug auf die Ebenen Q und R, so wird also, wenn wir uns die Ebenen P und P' als Begrenzungsebenen eines Krystalles denken, eine der Ebenen Q und R den inneren, die andere den äusseren Neigungswinkel der Ebenen P und P' halbiren. Von einer Ebene aber, die den äusseren Neigungswinkel zweier anderer Ebenen halbirt, sagt man, dass sie die Kante der zwei letzteren Ebenen gerade abstumpft.

Betrachten wir jetzt den Fall, dass die Ebenen P und P' einander parallel werden, so wird auch eine der Ebenen Q und R parallel P und P' werden müssen, während die andere auf denselben senkrecht stehen wird. In diesem Falle stellen uns die Ebenen P und P', da es uns ja nur immer auf die Richtung der Ebenen ankommt, bloss eine einzige Ebene vor, zu der eine der Ebenen Q und R parallel, die andere aber senkrecht ist. Die Richtung der letzteren Ebene wird jedoch ersicht-

lich insoferne unbestimmt, als sie ja bloss parallel zu sein braucht der Normale auf P, um diese herum aber jede beliebige Lage haben kann. Diess gibt uns also den folgenden Satz:

II. „Eine einzige Ebene ist isoschematisch mit Bezug auf eine ihr parallele und mit Bezug auf jede zu ihr senkrechte Ebene."

Hat man nicht nur zwei, sondern einen ganzen Komplex von Ebenen, welche isoschematisch mit Bezug auf eine Ebene R sein sollen, so müssen natürlich die Ebenen des Komplexes entweder alle paarweise isoschematisch, oder alle einzeln, oder aber theils paarweise, theils einzeln isoschematisch nach jener Ebene R sein. Für einen solchen Komplex von Ebenen lässt sich leicht der folgende Satz beweisen:

III. „Ist ein Komplex von Ebenen isoschematisch mit Bezug auf eine Ebene R, so wird jede Ebene dieses Komplexes, wenn man sie um die Normale auf R um 180^0 dreht, parallel entweder zu ihrer früheren Lage oder zu einer anderen Ebene des Komplexes. Umgekehrt: Wird jede Ebene eines Komplexes von Ebenen dadurch, dass man sie um die Normale einer Ebene R als Axe um 180^0 dreht, parallel zu ihrer ersten Lage oder zu einer anderen Ebene des Komplexes, so ist dieser Komplex isoschematisch nach der Ebene R."

Wir brauchen diesen Satz offenbar nur für zwei Ebenen, die auch parallel sein können, zu beweisen. Sind z. B. P und P' isoschematisch nach R, so müssen diese drei Ebenen in einer Zone liegen, und es muss mit Berücksichtigung der Richtung

$$PR = -P'R \quad \dots\dots\dots\dots (1)$$

sein. Dreht man nun P' um die Normale zu R um 180^0, so dass sie jetzt die Lage P'' einnimmt, so muss auch die Kante $P''R$ parallel der Kante $P'R$ sein, da ja diess eben die Drehung um 180^0 charakterisirt. P'' liegt daher ebenfalls in der Zone $[PQP']$, und es muss

$$P''R = -P'R \quad \dots\dots\dots\dots (2)$$

sein; durch die Drehung soll ja der Winkel $P'Q$ nicht geändert werden, sondern nur seine Richtung geht in die entgegengesetzte über. Aus (1) und (2) aber folgt

$$PR = P''R$$

d. h. P'' ist identisch oder wenigstens parallel mit P, da ja beide in derselben Zone auf derselben Seite von R mit dieser Ebene gleiche Winkel bilden sollen. Ersichtlich ist aber, wenn P parallel P' wird, noch immer P'' parallel P, und es wird daher eine einzelne nach R isoschematische Ebene durch die Drehung parallel ihrer ursprünglichen

Lage werden. Da nun ein isoschematischer Komplex von Ebenen nur aus paarweise oder einzeln isoschematischen Ebenen bestehen kann, so haben wir die erste Hälfte des Satzes III durch das Gesagte bewiesen, und es ist leicht einzusehen, dass sich auch die Umkehrung auf die nämliche Art erweisen lässt.

Betrachten wir den speziellen Fall eines Komplexes, welcher aus drei Ebenen besteht, die nicht in einer Zone liegen und worunter keine parallelen, so sind, damit ein solcher Komplex isoschematisch nach einer Ebene *R* sei, nur folgende zwei Fälle möglich:

Erstens, es sind die drei Ebenen einzeln isoschematisch nach *R*; alsdann müssen zwei derselben senkrecht zu *R*, eine aber ihr parallel sein. Denn wären alle drei senkrecht zu *R*, so lägen sie sämmtlich in einer Zone, und wären zwei parallel *R*, so wären sie auch unter einander parallel, welcher Fall ja ausgeschlossen sein soll.

Zweitens, zwei Ebenen sind paarweise, die dritte aber einzeln isoschematisch nach der Ebene *R*. Die letzte Ebene muss alsdann senkrecht zu *R* sein, denn wäre sie ihr parallel, so würde sie, sowie *R*, mit den zwei anderen Ebenen in einer Zone liegen müssen, was gegen unsere Annahme ist.

Ein Komplex von Ebenen kann auch isoschematisch nach mehreren Ebenen sein, es muss dann natürlich die Gruppirung der paarweise isoschematischen Ebenen des Komplexes für jede Ebene, nach der derselbe isoschematisch ist, eine andere werden.

Sucht man sich zu einer beliebigen Ebene *P* diejenigen, die mit ihr isoschematisch sind nach jeder einzelnen von *n* gewissen Ebenen *S*, sucht für die so erhaltenen Ebenen wieder diejenigen, die mit jeder derselben isoschematisch sind nach den einzelnen jener *n* Ebenen *S*, und setzt dieses Verfahren so lange fort, bis man keine neuen Ebenen mehr dadurch erhält: so werden die auf diese Weise aus der Ebene *P* abgeleiteten Ebenen zusammen einen Komplex bilden, der offenbar nach jeder der *n* Ebenen *S* isoschematisch ist, und den wir einen nach den Ebenen *S* isoschematischen einfachen Komplex nennen, da ja die Ebenen desselben sich alle aus der einzigen Ebene *P* ergeben.

Es ist aber auch klar, dass, wenn ein nach gewissen Ebenen isoschematischer Komplex kein einfacher ist, die Ebenen dieses Komplexes sich in eine Anzahl einfacher Komplexe abtheilen lassen müssen. Denn es ist nicht möglich, dass eine Ebene in zwei einfache Komplexe gehört, indem ja aus dieser Ebene sich die Ebenen ableiten lassen, die mit ihr einen einfachen Komplex bilden; die Ebenen zweier einfachen Komplexe, die eine Ebene gemeinschaftlich haben sollen, müssen daher

identisch dieselben sein. Hiernach unterscheiden wir also unter den Komplexen, die nach gewissen Ebenen isoschematisch sind, zweizählige, dreizählige u. s. f. nach der Anzahl einfacher Komplexe, in die sich die ursprünglichen Komplexe abtheilen lassen.

Um die Ebenen zu finden, die mit einer gegebenen Ebene P einen nach den n Ebenen S isoschematischen einfachen Komplex bilden, würde ersichtlich auch folgendes Verfahren dienen können: Man suche zu der Ebene P die mit ihr nach einer der Ebenen S isoschematische Ebene; zu den zwei so bestimmten Ebenen suche man die mit denselben nach einer zweiten der Ebenen S isoschematischen Ebenen; hierauf zu diesen vier Ebenen die mit ihnen nach einer der dritten der Ebenen S isoschematischen Ebenen u. s. f., wobei man jedoch bei der letzten der Ebenen S nicht stehen bleibt, sondern wieder auf die erste übergeht und das Verfahren so lange fortsetzt, bis man keine neuen Ebenen mehr dadurch erhält, sondern durch Wiederholung des Verfahrens nur mehr auf schon früher bestimmte Ebenen zurückgeführt wird.

Freilich kann es bei diesem oder dem früheren Verfahren geschehen, dass man nicht mehr auf die ursprünglichen Ebenen zurückgeführt wird und eigentlich eine unendliche Anzahl von Ebenen erhält; es heisst diess offenbar so viel, dass nach solchen n Ebenen S ein Komplex von Ebenen nicht isoschematisch sein kann.

Im Verlaufe dieses Kapitels werden wir auch Komplexe von Ebenen zu betrachten haben, die isoschematisch mit Bezug auf jede ihrer eigenen Ebenen sind; wir nennen einen solchen Komplex **isoschematisch mit Bezug auf sich selbst.**

§. 18. Isoschematische Linien.

Nachdem wir im vorigen Paragraphe den Begriff isoschematischer Ebenen festgestellt, gehen wir zu den Linien über und nennen zwei Linien isoschematisch mit Bezug auf eine Ebene R, wenn zwei zu diesen Linien senkrechte Ebenen P und P' isoschematisch nach R sind. Sollen die Ebenen P und P' isoschematisch nach R sein, so muss R in einer Zone mit P und P' und gleich geneigt zu beiden sein; die Normalen dieser drei Ebenen werden daher, wenn man sie durch einen und denselben Punkt im Raume gehen lässt, in einer Ebene liegen, und zwar wird die Normale zu R gleiche Winkel mit den Normalen zu P und P' bilden müssen. Wir können daher, wenn wir noch bedenken, dass je zwei Ebenen isoschematisch nach zwei anderen Ebenen sind, folgenden Satz aussprechen:

I. „Je zwei Linien sind isoschematisch mit Bezug auf zwei zu einander senkrechte Ebenen, deren Normalen die beiden Neigungswinkel der zwei Linien halbiren.“

Gehen die beiden Ebenen P und P' in eine einzige nach R isoschematische Ebene über, so muss dem vorhergehenden Paragraphe zufolge P entweder senkrecht oder parallel zu R werden. Alsdann gehen aber auch die zu P und P' senkrechten Linien in eine einzige über, die entweder parallel oder senkrecht zu R ist. In dem ersteren dieser zwei Fälle ist offenbar die Lage der Linie theilweise unbestimmt, indem sie zwar senkrecht zur Normale R sein muss, um diese herum aber jede beliebige Lage haben kann. Wir können also sagen:

II. „Jede Linie ist isoschematisch nach der auf ihr senkrecht stehenden und nach jeder ihr parallelen Ebene.“

Soll daher ein ganzer Komplex von Linien isoschematisch mit Bezug auf eine Ebene R sein, so müssen dieselben ähnlich wie bei einem Komplexe von Ebenen, entweder alle einzeln oder alle paarweise, oder aber theils einzeln, theils paarweise isoschematisch nach der Ebene R sein. Für einen solchen Komplex von Linien gilt nun entsprechend dem Satze für die Ebenen der folgende Satz:

III. „Ist ein Komplex von Linien isoschematisch mit Bezug auf eine Ebene R, so wird jede Linie dieses Komplexes, wenn man sie um die Normale auf R um 180^0 dreht, parallel entweder zu ihrer ersten Lage oder zu einer anderen Ebene des Komplexes. Umgekehrt: Wird jede Linie eines Komplexes dadurch, dass man sie um die Normale einer Ebene R als Axe um 180^0 dreht, parallel zu ihrer ersten Lage oder zu einer anderen Ebene des Komplexes, so ist derselbe isoschematisch mit Bezug auf die Ebene R.“

Ist nämlich ein Komplex von Linien isoschematisch nach einer Ebene R, so ist es auch der Komplex der zu diesen Linien senkrechten Ebenen, was ja schon aus der Definition isoschematischer Linien hervorgeht. Dem Satze III des vorhergehenden Paragraphes zufolge wird eine jede Ebene dieses Komplexes durch die Drehung entweder sich selbst oder einer andern Ebene des Komplexes parallel, und daher natürlich auch die Normale dieser Ebene entweder sich selbst oder der Normale einer anderen Ebene des Komplexes parallel, womit der obige Satz bewiesen ist, indem auch die Umkehrung sich auf demselben Wege ergibt.

Haben die Ebenen eines Komplexes E, der nach R isoschematisch ist, eine solche relative Lage, dass, wenn zwei Ebenen eine Kante bilden, diess auch die zwei Ebenen thun, welche mit der ersteren nach R isoschematisch sind, so wird der Komplex K der Kanten, welche die

Ebenen des Komplexes *E* miteinander bilden, ebenfalls nach *R* isoschematisch sein müssen. Drehen wir nämlich je zwei Ebenen, die eine Kante bilden, um die Normale zu *R* um 180°, so werden sie entweder parallel sich selbst oder zweien anderen Ebenen des Komplexes *E*, daher offenbar auch ihre Kante durch die Drehung entweder sich selbst oder einer anderen Kante parallel wird. Da diess von jeder Kante gilt, so muss dem Satze III zufolge der Komplex *K* derselben isoschematisch nach *R* sein, und wir haben den Satz:

IV. „Ist ein Komplex von Ebenen isoschematisch nach einer Ebene *R*, so ist es auch der Komplex der Kanten dieser Ebenen, vorausgesetzt, dass wirklich für jede Kante zweier Ebenen auch die Kante vorhanden ist, welche die zu den ersteren zwei Ebenen nach *R* isoschematischen Ebenen miteinander bilden."

Die letztere Bedingung ist z. B. erfüllt, wenn die paarweise isoschematischen Ebenen des Komplexes *E* gleich weit von einem und demselben Punkte *O* der Ebene *R* abstehen.

Ein Komplex von Linien kann auch isoschematisch mit Bezug auf mehrere Ebenen sein, natürlich muss dann die paarweise Gruppirung der isoschematischen Linien für jede Ebene eine andere werden. Solche Komplexe sind entweder einfache oder zwei-, dreizählige u. s. f., gerade wie wir diess bei den Ebenen kennen gelernt haben. Auch wird man die Linien, welche mit einer gegebenen Linie einen nach *n* Ebenen *S* isoschematischen einfachen Komplex bilden, dadurch finden, dass man Senkrechte fällt auf die Ebenen, welche mit der zu der gegebenen Linie senkrechten Ebene einen nach allen *n* Ebenen *S* isoschematischen einfachen Komplex bilden.

§. 19. Isoschematische Krystallzonen.

Wenden wir den Begriff isoschematischer Ebenen auf die möglichen Flächen der Zone eines Krystalles an, so können wir als Definition einer mit Bezug auf die Ebene *Q* isoschematischen Krystallzone sagen, dass diess eine solche Zone ist, in welcher zu jeder Fläche eine andere mit ihr nach der Ebene *Q* isoschematische Fläche möglich ist. Ist eine Krystallzone also isoschematisch nach einer Ebene *Q*, so wird zu jeder Fläche *P* dieser Zone eine andere *P'* möglich sein, so zwar, dass der Neigungswinkel dieser zwei Flächen durch die Ebene *Q* halbirt wird. Eine in dieser Zone zu *Q* senkrechte Ebene *R* wird nun offenbar den zweiten Neigungswinkel der Flächen *P* und *P'* halbiren; letztere Flächen werden daher auch isoschematisch nach *R* sein, und da *P* eine beliebige Flächenzone vorstellt, so wird die Zone selbst der obigen

Definition zufolge isoschematisch nach der Ebene R sein müssen. Diess gibt uns also den folgenden Satz:

I. „Ist die Zone eines Krystalles isoschematisch mit Bezug auf eine Ebene Q, so ist sie es auch mit Bezug auf eine in dieser Zone zu Q senkrechte Ebene R."

Dass aber solche Zonen, deren Flächen ja auch dem Gesetze der Rationalität der Indices gehorchen müssen, wirklich an Krystallen möglich sind, geht aus den nachfolgenden zwei Sätzen hervor, in welchen gezeigt wird, dass, damit eine Zone eines Krystalls isoschematisch nach einer Ebene sei, die Elemente dieses Krystalles nur eine einzige Bedingung zu erfüllen haben. Der erste dieser Sätze lautet:

II. „Sind zwei Krystallflächen zu einander senkrecht, so ist die Zone dieser zwei Flächen isoschematisch mit Bezug auf eine jede derselben."

Wir werden diesen Satz bewiesen haben, wenn wir zeigen können, dass eine Ebene P', welche mit einer beliebigen Fläche P in der Zone der zwei zu einander senkrechten Flächen Q und R isoschematisch nach den letzteren Flächen ist, wirklich eine Fläche dieser Zone sein kann, d. h. dass ihre Indices sich wie rationale Grössen verhalten. Es seien die Symbole von P, P', Q, R

$$Q\,(efg),\; R\,(uvw),\; P\,(hkl),\; P'\,(h'k'l')$$

und die Aufgabe ist nun, um zu entscheiden, ob die Indices der Ebene P' rationale Grössen sind, dieselben mit Hilfe der Indices der anderen Flächen und der für die Neigungswinkel dieser Flächen angenommenen Beziehungen

$$QR = 90^0, \quad PQ = QP'$$

zu bestimmen. Die Lösung dieser Aufgabe ergibt sich aber leicht mit Hilfe der im §. 16 hiefür gegebenen Regel. Es ist nämlich mit Hinweglassung der doppelten Vorzeichen

$$h' = e - un$$
$$k' = f - vn$$
$$l' = g - wn$$

wo

$$n = \frac{oa'}{oa} \left[\frac{PQ}{PR}\right]$$

das Verhältnis von oa zu oa' aber auf folgende Weise ermittelt werden kann: Man mache auf einer und derselben Seite der Linie oQ und mit dem beliebigen Punkte b derselben, Fig. 12

$$QoR = QR = 90^0,\; QbP = QP,\; QbP' = QP'$$

sind alsdann a und a' die Durchschnittspunkte der Linien bP und bP' mit oR, so geben uns deren Entfernungen vom Punkte o die gesuchten Grössen oa und oa', wobei aber letztere mit negativem Vorzeichen zu nehmen ist, da der Punkt a' in diesem Falle auf der entgegengesetzten Seite vom Punkte o wie a liegt. In Folge unserer Konstruktion ist aber offenbar

$$\Delta\ abo \cong \Delta\ a'bo$$

da ja ausser den beiden rechten Winkeln aob und $a'ob$ und der gemeinschaftlichen Seite bo auch die Winkel abo und $a'bo$ gleich sein müssen. Es ist daher der absoluten Länge nach auch oa gleich oa' und mit Berücksichtigung des Vorzeichens

$$\frac{oa'}{oa} = -1$$

Die Indices der Fläche P' werden somit

$$h' = e + u\left[\frac{PQ}{PR}\right]$$
$$k' = f + v\left[\frac{PQ}{PR}\right]$$
$$l' = g + w\left[\frac{PQ}{PR}\right]$$

und sind wirklich rationale Grössen, sobald es nur auch die Indices der Flächen Q, R und P sind.

Wir wollen jetzt folgenden Satz beweisen:

III. „Sind in einer Zone eines Krystalles zwei Flächen gleich geneigt zu einer dritten Fläche, so ist auch eine in dieser Zone zur letzteren Fläche senkrechte Ebene eine mögliche Fläche des Krystalles, und daher die Zone isoschematisch nach diesen beiden, zu einander senkrechten Flächen.“

Der zweite Theil dieses Satzes folgt offenbar aus dem Satze II, sobald wir den ersten Theil bewiesen haben. Es seien also die Flächen P und P' gleich geneigt zu Q, in der Zone dieser Flächen aber die Ebene R senkrecht auf Q, somit

$$PQ = QP', \qquad QR = 90^0$$
$$PQ = \tfrac{1}{2}PP', \quad PR = \tfrac{1}{2}PP' + 90^0$$

Die Symbole dieser drei Flächen und der Ebene R seien

$$P\ (hkl),\ P'\ (h'k'l'),\ Q\ (efg),\ R\ (uvw)$$

zu beweisen aber ist, dass die Indices von R rationale Grössen sind, und

die Ebene R somit wirklich eine mögliche Fläche ist. Mit Hilfe der im §. 16 gegebenen Regel finden wir nun für die Indices der Ebene R die Ausdrücke

$$u = h - h'n$$
$$v = k - k'n$$
$$w = l - l'n$$

wobei

$$n = \frac{oa}{oa'} \left[\frac{QP'}{QP}\right]$$

und der Quotient von oa durch oa' auf folgende Weise bestimmt werden kann: Man mache auf derselben Seite der Linie oP und in dem beliebigen Punkte b derselben die Winkel, Fig. 13

$$PoP' = PP' \quad PbQ = {}^1\!/_2 PP', \quad PbR = PR = 90^0 + {}^1\!/_2 PP';$$

die Entfernungen des Punktes o von den Durchschnittspunkten a, a' der Linien bQ, bR mit oP' geben dann die unbekannten Grössen oa und oa', von welchen die letztere mit negativem Vorzeichen zu nehmen ist, da der Punkt a' auf der entgegengesetzten Seite von o liegt, wie der Punkt a. Zufolge unserer Konstruktion hat man aber

$$PoP' = 2PbQ, \quad aba' = 90^0$$
$$bao = boP' - abo = PoP' - PbQ = PbQ = abo$$
$$ba'o = 90^0 - bao = 90^0 - abo = a'bo$$

Die Dreiecke abo und $ba'o$ sind also gleichschenklig, und der absoluten Länge nach muss

$$oa = bo = oa'$$

mit Berücksichtigung des Vorzeichens aber

$$\frac{oa'}{oa} = -1$$

sein. Hiedurch werden die Indices der Ebene R

$$u = h + h' \left[\frac{QP}{QP'}\right]$$
$$v = k + k' \left[\frac{QP}{QP'}\right]$$
$$w = l + l' \left[\frac{QP}{QP'}\right]$$

also wirklich rationale Grössen, womit der aufgestellte Satz bewiesen ist.

Sind zwei Flächen, P, P' isoschematisch mit Bezug auf eine dritte tautozonale Fläche Q, so sind, wie wir aus dem §. 17 ersehen,

nur zwei Fälle möglich, entweder die beiden Flächen sind paarweise isoschematisch zur Fläche Q, d. h. mit ihr in einer Zone und zu ihr gleich geneigt, oder aber die beiden Flächen P, P' sind einzeln isoschematisch nach Q. In letzterem Falle muss eine der beiden Flächen senkrecht, die andere aber parallel Q sein; wären beide parallel, so hätten wir statt zwei Flächen ja nur eine, wären aber beide senkrecht zu Q, so könnte ja Q nicht mit ihnen tautozonal sein. Wie der Satz II und III lehren, haben wir aber für diese beiden Fälle, in welchen zwei Flächen, P und P', isoschematisch nach der tautozonalen Fläche Q sind, bewiesen, dass alsdann die Zone dieser Flächen isoschematisch sein muss mit Bezug auf Q und eine in dieser Zone zu Q senkrechten Ebene R, welche eine mögliche Fläche ist. Wir können somit den folgenden Satz aussprechen:

IV. „Sind zwei Flächen entweder paarweise oder einzeln isoschematisch nach einer tautozonalen Fläche Q, so ist die Zone dieser Flächen isoschematisch nach Q und nach der zu Q in dieser Zone senkrechten möglichen Fläche."

Bei den Beweisen der Sätze II und III haben wir jedesmal eine Beziehung zwischen den Indices von vier tautozonalen Flächen gefunden, von welchen Flächen zwei paarweise isoschematisch nach den beiden übrigen, zu einander senkrechten Flächen sind. Stellen wir diese zwei Beziehungen zusammen, so erhalten wir den folgenden Satz:

V. „Halbirt die Fläche Q (efg) einen der Neigungswinkel der Flächen P (hkl) und P' $(h'k'l')$, so sind die Indices der Fläche R, welche den anderen Neigungswinkel halbirt und daher zu Q senkrecht ist:

$$u = \pm \left(h + h' \left[\frac{QP}{QP'}\right]\right)$$
$$v = \pm \left(k + k' \left[\frac{QP}{QP'}\right]\right)$$
$$w = \pm \left(l + l' \left[\frac{QP}{QP'}\right]\right)$$

Sind aber die Flächen Q (efg) und R (uvw) zu einander senkrecht und P (hkl) eine Fläche in ihrer Zone, so sind die Indices einer Fläche P', deren Neigungswinkel mit P durch Q und R halbirt werden, gegeben durch die Gleichungen

$$h' = \pm \left(e + u \left[\frac{PQ}{PR}\right]\right)$$
$$k' = \pm \left(f + v \left[\frac{PQ}{PR}\right]\right)$$

$$l' = \pm \left(g + w \left[\frac{PQ}{PR}\right]\right)^{\alpha}$$

Die Grösse, welche wir bei den Beweisen der Sätze II und III mit $\frac{oa}{oa'}$ bezeichnet haben, ist dem §. 15 zufolge nichts anderes, als das anharmonische Verhältnis der Flächen P und P' zu den Flächen Q und R, welches Verhältnis, wie wir ebenfalls im §. 15 gezeigt haben, sich immer durch die Indices der vier Flächen ausdrücken lässt. In den betrachteten Sätzen wurde aber dieses Verhältnis gleich -1, in welchem Falle man dasselbe ein harmonisches Verhältnis nennt. Sind also die beiden Flächen P und P' isoschematisch mit Bezug auf Q und R, so ist dem Gesagten zufolge

$$\left[\frac{QP}{QP'}\right] : \left[\frac{RP}{RP'}\right] = -1$$

oder auch

$$\left[\frac{QP}{QP'}\right] = -1 \,.\, \left[\frac{RP}{RP'}\right]$$

Diess gibt den folgenden Satz:

VI. „Sind P, P', Q, R die Symbole von vier tautozonalen Flächen, von denen die zu einander senkrechten Flächen Q und R die Winkel der beiden anderen halbiren, so besteht die Gleichung

$$\left[\frac{QP}{QP'}\right] + \left[\frac{RP}{RP'}\right] = 0$$

§. 20. Krystallzonen, die isoschematisch nach mehreren Flächen sind.

Aus den Sätzen des vorigen Paragraphes ergibt sich, dass die Elemente eines Krystalles nur eine Bedingung zu erfüllen brauchen, damit eine Zone desselben isoschematisch werde nach zwei ihrer Flächen, die auf einander senkrecht stehen; es genügt ja zu diesem Zwecke, dass in der betreffenden Zone der Neigungswinkel zweier Flächen ein rechter ist, oder aber, dass die zwei Winkel zwischen drei Flächen der Zone einander gleich sind.

Nehmen wir nun an, dass die drei auf einander folgenden Neigungswinkel der vier tautozonalen Flächen P, P', Q, R einander gleich werden, so muss die Zone dieser Flächen dem §. 19 zufolge offenbar isoschematisch nach P' und Q sein. In diesem Falle werden die Elemente des betreffenden Krystalles zwei Bedingungen unterworfen sein; allein es entsteht hier die Frage, ob denn dieser Fall überhaupt möglich ist, oder vielleicht nur für gewisse Werthe der gleichen Winkel statt-

finden kann. Wir haben nämlich im §. 15 gesehen, dass wir nur zwei Winkeln in der Zone eines Krystalls beliebige Werthe ertheilen können, ohne dass derselbe aufhört, möglich zu sein, dass aber, wenn wir die Winkel zwischen vier tautozonalen Flächen gewissen Bedingungen unterwerfen, wir erst nachzuweisen haben, dass diese Flächen wirklich mögliche Flächen einer Krystallzone sein können.

Wir werden also für drei dieser Flächen von vornherein rationale Indices annehmen können, und diese Rationalität für die vierte erst nachweisen müssen, indem wir etwa zeigen, dass das anharmonische Verhältnis dieser vier Flächen ein rationales ist.

Wir wollen somit jetzt untersuchen, ob immer oder unter welchen Bedingungen das anharmonische Verhältnis von vier tautozonalen Flächen, die drei gleiche Winkel unter einander bilden, ein rationales wird. Um dieses Verhältnis zu finden, schneiden wir solche vier Flächen P, P', Q, R, für welche

$$PP' = P'Q = QR = \varphi$$

durch eine zu ihnen senkrechte Ebene, und erhalten so, Fig. 14, die Linien oP, oP', oQ, oR, für deren gegenseitige Neigungen die Gleichungen

$$PoP' = PP' = \varphi, \quad PoQ = PQ = 2\varphi, \quad PoR = PR = 3\varphi$$

gelten müssen. Schneiden wir nun diese Linien durch eine Gerade, welche sie in den Punkten p, p', q und r trifft, so ist, wenn

$$V = \frac{qp}{qp'} : \frac{rp}{rp'}$$

V das anharmonische Verhältnis der Flächen Q und R zu den Flächen P und P'. Da die Lage der Linie pr beliebig ist, so können wir uns dieselbe auch so gezogen denken, dass $op = or$ wird; es muss alsdann in Folge der Kongruenz der Dreiecke pop' und roq auch

$$op' = oq, \quad qp = rp', \quad rq = pp'$$

sein. Es wird somit

$$\frac{1}{V} = \frac{qp'}{qp} \cdot \frac{rp}{rp'} = \frac{qp'}{qp} = \frac{2pq - qp'}{qp} = \frac{qp'}{qp}\left(2 - \frac{qp'}{qp}\right)$$

Diesen Ausdruck wollen wir noch dadurch umgestalten, dass wir in demselben den Bruch $\frac{qp'}{qp}$ durch das Verhältnis der Linien pq' zu oq' bestimmen, welches offenbar das Verhältnis der Sehne des Winkels φ zu dem Halbmesser vorstellt, op' ist ja gleich oq. Zur Abkürzung setzen wir hiefür

$$s = \frac{qp'}{op'}$$

und bemerken, dass der Werth von s nur von dem Winkel φ und nicht etwa auch von der Lage des Punktes p auf der Linie oP' abhängt.

Machen wir zu dem erwähnten Zwecke auf der Linie oP

$$ok = op$$

so haben wir zwei gleichschenklige Dreiecke pok und $p'oq$, in denen die Winkel an der Basis alle gleich $90^0 - \frac{\varphi}{2}$ sind, daher auch

$$pko = op'q = pp'k,$$

das Dreieck $pp'k$ somit ebenfalls ein gleichschenkliges und

$$pk = pp'$$

ist. In Folge der Gleichheit dieser Winkel sind aber die drei Dreiecke pok, $p'oq$, $pp'k$ einander ähnlich und geben die folgenden Proportionen:

$$op : op' = kp : qp'$$
$$pp' : oq = kp' : qp'$$

woraus man leicht

$$op = ok = \frac{op' \, . \, kp}{qp'} = \frac{op' \, . \, pp'}{qp'}$$
$$kp' = \frac{qp' \, . \, pp'}{oq} = \frac{qp' \, . \, pp'}{op'}$$

erhält. Die Subtraktion dieser Gleichungen gibt

$$ok - kp' = op' = pp' \ . \ \frac{op'^2 - qp'^2}{qp' - op'}$$

und die Division mit op

$$1 = \frac{qp - qp'}{qp'} (1 - s^2) = \left(\frac{qp}{qp'} - 1\right)(1 - s^2)$$

woraus man leicht

$$\frac{qp'}{qp} = \frac{1 - s^2}{2 - s^2}$$

erhält. Setzt man nun diesen Werth in den letzten für $\frac{1}{V}$ gefundenen Ausdruck, so wird

$$\frac{1}{V} = \frac{1 - s^2}{2 - s^2} \cdot \frac{3 - s^2}{2 - s^2} = \frac{(2 - s^2 - 1)(2 - s^2 + 1)}{(2 - s^2)^2}$$
$$= \frac{(2 - s^2)^2 - 1}{(2 - s^2)^2} = 1 - \frac{1}{(2 - s^2)^2}$$

Das anharmonische Verhältnis V wird aber offenbar gleichzeitig mit seinem reciproken Werthe $\frac{1}{V}$ rational; damit aber das letztere der Fall ist, muss, wie die vorstehende Gleichung lehrt, $(2 - s^2)^2$ eine rationale Grösse sein. Setzen wir daher, unter m eine rationale Zahl verstanden,

$$2 - s^2 = m$$

so wird

$$s = \sqrt{2 - \sqrt{m}}$$

und wir können somit sagen:

I. „Sollen die drei Winkel zwischen vier tautozonalen Flächen den gleichen Werth φ haben, so muss für denselben das Verhältnis der Sehne zum Halbmesser von der Form $\sqrt{2 - \sqrt{m}}$ sein, unter m eine rationale Zahl verstanden."

Dieselbe Bedingung wird nun erfüllt sein müssen, soll eine Krystallzone isoschematisch sein nach zwei ihrer Flächen, die nicht auf einander senkrecht sind, indem alsdann vier Flächen dieser Zone gleiche Winkel bilden. Aber auch in dem Falle, dass der Winkel zwischen jenen zwei Flächen ein rechter ist, hat für denselben das Verhältnis der Sehne zum Halbmesser die Form $\sqrt{2 - \sqrt{m}}$, indem man sich leicht überzeugt, dass für einen Winkel von 90^0 dieses Verhältnis gleich $\sqrt{2} = \sqrt{3 - \sqrt{0}}$ wird. Wir können somit ganz allgemein sagen:

II. „Soll eine Krystallzone isoschematisch nach zwei ihrer Flächen sein, so muss für den Neigungswinkel dieser Flächen das Verhältnis der Sehne zum Halbmesser von der Form $\sqrt{2 - \sqrt{m}}$ sein, wo m eine ganze oder gebrochen rationale Zahl bedeutet."

Für solche Krystallzonen gelten nun auch folgende Sätze:

III. „Sind in einer Krystallzone zu einer Fläche drei andere unter den Winkeln φ, 2φ, 3φ geneigt, so ist in dieser Zone auch jede Ebene eine mögliche Fläche, deren Neigungswinkel zur ersten Fläche von der Form $\pm n\varphi$ oder $\pm n\varphi + 90$ ist, unter n eine ganze Zahl verstanden."

Nehmen wir, um diess zu beweisen, an, dass P_0, P_1, P_2, P_3 vier Flächen einer und derselben Zone seien, so zwar, dass

$$P_0P_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = \varphi$$

also

$$P_0P_2 = 2\varphi, \; P_0P_3 = 3\varphi$$

ist. Die Flächen P_1 und P_3 sind alsdann gleich geneigt zu P_2 und die

Zone dieser Flächen daher nach §. 19 isoschematisch mit Bezug auf P_2; es muss daher in dieser Zone zur Fläche P_0 auch eine andere Fläche P_4 möglich sein, für welche

$$P_4P_2 = P_2P_0$$

Hieraus erhält man sogleich

$$P_0P_4 = 2P_0P_2 = 4\varphi$$

Es ist also in der betrachteten Zone auch eine Fläche P_4 möglich, welche mit P_0 den Winkel 4φ bildet. Ebenso beweist man die Möglichkeit einer Fläche P_5, für welche

$$P_1P_3 = P_3P_5$$

und also

$$P_0P_5 = P_0P_1 + 2P_1P_3 = 5\varphi$$

ist. Man sieht, dass sich dies Verfahren beliebig weit fortsetzen lässt, und dass man wirklich auf diese Weise für jeden ganzen Werth von n die Möglichkeit einer Fläche P_n beweisen kann, für welche

$$P_0P_n = n\varphi$$

Auf die nämliche Art lässt sich aber auch die Möglichkeit der Fläche P_n für negative Werthe von n beweisen; man braucht ja nur bei der Fläche P_3 beginnend das Verfahren über P_0 hinaus fortzusetzen, wo man dann wieder Flächen bekommt, die um Vielfache des Winkels φ von der Fläche P_0 entfernt in diesem Falle aber auf der entgegengesetzten Seite wie früher liegen. Da jede Fläche P_n den Winkel der Flächen P_{n-1} und P_{n+1} halbirt, so ist die Zone dieser Flächen nach jeder Fläche P_n isoschematisch, daher auch die Ebenen senkrecht zu diesen Flächen mögliche Flächen der Zone sind. Diese Ebenen werden aber offenbar mit der Fläche P_0 Winkel von der Form $\pm n\varphi + 90^0$ bilden.

Der eben bewiesene Satz lässt sich noch auf folgende Weise verallgemeinern:

IV. „Sind die zwei Neigungen zwischen drei tautozonalen Flächen gleich ein und demselben Winkel φ, für welchen das Verhältnis der Sehne zum Halbmesser von der Form $\sqrt{-2\sqrt{m}}$ ist, unter m eine rationale Zahl verstanden, so sind in dieser Zone alle Ebenen mögliche Flächen, die mit irgend einer Fläche dieser Zone Winkel von der Form $\pm n\varphi$ oder $\pm n\varphi + 90^0$ bilden, wo n jede ganze Zahl mit Einschluss der Nulle sein kann.“

Wir brauchen diesen Satz offenbar nur für den Fall, dass n gleich Eins ist, zu beweisen. Zwischen einer Ebene P_n, die mit einer Fläche P die Zone der Winkel $n\varphi$ macht, liegen nämlich eine Anzahl Ebenen

$P_1, P_2 \ldots\ldots$, so dass die Winkel zwischen je zwei aufeinander folgenden Ebenen $P, P_1, P_2 \ldots P_n$ alle gleich φ sind: gilt nun der Satz für $n = 1$, so wird P_1 eine mögliche Fläche sein, da sie mit P den Winkel φ bildet; alsdann wird aber auch P_2 eine mögliche Fläche sein müssen, weil diese Ebene wieder mit der möglichen Fläche P_1 den Winkel φ bildet, und dieser Schluss wird sich ersichtlich so lange fortsetzen lassen, bis man bei der letzten Ebene P_n angelangt ist.

Um aber den angeführten Satz für den Fall n gleich Eins zu beweisen, nehmen wir an, dass die tautozonalen Flächen P und Q gleiche Winkel φ mit P' bilden, dass in derselben Zone R eine beliebige Fläche und S eine zu R unter dem Winkel φ geneigte Ebene sei, von der eben gezeigt werden soll, dass sie eine mögliche Fläche der Zone ist. Wir schneiden diese fünf Ebenen; nachdem wir sie durch eine und dieselbe Linie im Raume gelegt haben, durch eine zu ihnen senkrechte Ebene, und erhalten so, Fig. 15, die Durchschnittslinien oP, oP', oQ, oR und oS, für welche der Annahme zufolge

$$PoP' = P'oQ = RoS$$

sein muss. Würden wir diese Linien durch eine beliebige Gerade schneiden, so könnten wir dann leicht die anharmonischen Verhältnisse zwischen je vier dieser fünf Ebenen angeben. Dem §. 15 zufolge können wir aber diese Verhältnisse auch dadurch bestimmen, dass wir durch den beliebigen Punkt b der Linie oP Parallele mit oQ, oR, oS ziehen, welche die Linie oP' etwa in den Punkten a, a', a'' treffen, so dass also

$$ab \parallel oQ, \quad a'b \parallel oR, \quad a''b \parallel oS$$

Das anharmonische Verhältnis der Flächen Q und R zu den Flächen P und P' ist alsdann

$$V = \frac{oa}{oa'}$$

das der Ebenen Q und S zu P und P' aber

$$W = \frac{oa}{oa''}$$

Von dem ersteren dieser Verhältnisse wissen wir, dass es eine rationale Grösse ist, da es sich ja auf vier Ebenen bezieht, die der Annahme zufolge mögliche Flächen einer Krystallzone sind. Können wir diese Rationalität auch für das zweite Verhältnis W beweisen, so haben wir alsdann gezeigt, dass die Ebene S eine mögliche Fläche dieser Zone ist, womit der Satz IV allgemein bewiesen ist, da ja die Fläche

Q eine ganz beliebige Fläche der Zone vorstellt. Unserer Konstruktion zufolge ist aber

$$\begin{aligned} bao &= PoQ = PoP' \\ ba'o &= PoR = RoQ + P'oQ = RoS + QoR = QoS \\ &= aba'' \end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass das Dreieck oab ein gleichschenkliges, somit

$$oa = ab$$

ist; ferner, dass die Dreiecke $a'ob$ und aba'' einander ähnlich sind, da zwei ihrer Winkel stückweise gleich sind. Aus diesen Dreiecken erhalten wir aber die Proportion

$$\begin{aligned} ob : oa' &= aa'' : ab \\ &= (oa - oa'') : ob \end{aligned}$$

woraus man leicht

$$oa'' = oa - \frac{ob^2}{oa'}$$

und

$$\frac{1}{W} = \frac{oa''}{oa} = 1 - \frac{ob^2}{oa \,.\, oa'} = 1 - V\left(\frac{ob}{oa}\right)^2$$

findet. Der Bruch $\frac{ob}{oa}$ lässt sich aber durch das Verhältnis der Sehne des Winkels $PoP' = \varphi$ zum Halbmesser ausdrücken, indem man sich auf der Linie oP die Punkte s und h bestimmt, für welche

$$os = oa, \quad ha \perp oP$$

Aus den rechtwinkligen Dreiecken sah und aho ergibt sich dann successive

$$\begin{aligned} as^2 &= ah^2 + hs^2 = oa^2 - oh^2 + hs^2 = oa^2 - (oh + hs)(oh - hs) \\ &= oa^2 - os\,(os - 2hs) = oa^2 - oa\,(oa - 2hs) \\ &= 2oa \,.\, hs \end{aligned}$$

aus den Dreiecken sah und ahb aber

$$\begin{aligned} as^2 &= ah^2 + hs^2 = ab^2 - bh^2 + hs^2 = bo^2 - (bh + hs)(bh - hs) \\ &= bo^2 - (oa - ob)(oa - ob - 2hs) \\ &= oa^2 - 2ob - oa + 2\,(oa - ob)\,hs. \end{aligned}$$

Eliminirt man nun aus den so gefundenen zwei Werthen von as^2 die Grösse hs, so erhält man

$$oa^3 = ob\,(2oa^2 - as^2)$$

und wenn man diese Gleichung durch oa^3 dividirt

$$1 = \frac{ob}{oa}\left(2 - \frac{as^2}{oa^2}\right)$$

Nun ist aber der Bruch $\frac{os}{oa}$ nichts anderes als das Verhältnis der Sehne des Winkels φ zum Halbmesser und unserer Annahme zufolge gleich $\sqrt{2-\sqrt{m}}$; diess gibt

$$2-\frac{as^2}{oa^2}=2-(2-\sqrt{m})=\sqrt{m},\quad \frac{ob}{oa}=\frac{1}{\sqrt{m}}$$

Hiedurch wird schliesslich

$$\frac{1}{W}=1-\frac{V}{m}$$

und da m und V rational sind, auch W eine rationale Grösse. Es ist somit der Satz IV für Winkel von der Form $n\varphi$ bewiesen, und zwar sowohl für positive als negative Werthe von φ, da wir ja gar keine Voraussetzung für die Richtung, in welcher die Winkel gezählt werden sollen, gemacht haben. Die Zone wird offenbar isoschematisch sein nach jeder ihrer Flächen, da ja zu beiden Seiten einer jeden Fläche, wie eben bewiesen, eine andere unter dem Winkel φ zu ihr geneigte Fläche möglich sein muss; da also die Zone nach jeder ihrer Fläche isoschematisch ist, so wird dem §. 19 zufolge jede Ebene, die senkrecht zu irgend einer Fläche einer solchen Zone, auch eine mögliche Fläche derselben sein. Es ist hiermit der Satz IV auch für den Fall von Ebenen, die Winkel von der Form $\pm n\varphi + 90^0$ mit einer Fläche der Zone bilden, bewiesen.

Zu bemerken ist hiebei, dass der Satz IV für einen Winkel φ der gleich 90^0 ist, nicht mehr gilt, obwohl auch für diesen Winkel das Verhältnis der Sehne zum Halbmesser von der Form $\sqrt{2=\sqrt{m}}$ ist, indem in diesem Falle von den drei ursprünglichen Flächen zwei zusammenfallen und in der Zone derselben daher eigentlich nur ein Neigungswinkel gleich φ ist.

Die Voraussetzungen des zuletzt bewiesenen Satzes sind offenbar erfüllt, wenn eine Zone isoschematisch nach zwei ihrer Flächen ist, die nicht aufeinander senkrecht stehen. Machen nämlich diese zwei Flächen den Winkel φ mit einander, so muss die Sehne dieses Winkels nach Satz II sich zum Halbmesser verhalten, wie $\sqrt{2-\sqrt{m}}$ zu 1, und es sind sogar drei aufeinander folgende Winkel gleich φ. Wir können daher schliesslich noch den folgenden Satz aussprechen:

V. „Ist eine Krystallzone isoschematisch nach zwei ihrer Flächen, die nicht auf einander senkrecht stehen, so ist sie auch isoschematisch mit Bezug auf eine jede in dieser Zone mögliche Fläche.“

§. 21. Tautozonale Krystallflächen, die isoschematisch mit Bezug auf sich selbst sind.

Sollen r tautozonale Ebenen, worunter keine parallelen, so angeordnet sein, dass sie isoschematisch mit Bezug auf sich selbst sind. d. h. dass sie einen Komplex von Ebenen bilden, der nach jeder seiner Ebenen isoschematisch ist, so muss, wenn man diese Ebenen durch eine und dieselbe Linie im Raume gehen lässt, offenbar der Winkel je zweier benachbarten Ebenen immer derselbe, und zwar gleich $x = \frac{360^0}{2r}$ sein, da ja r tautozonale Ebenen, wenn unter denselben keine parallelen sind, den Raum um ihre gemeinschaftliche Durchschnittslinie herum in $2r$ Theile theilen.

Wir wollen jetzt untersuchen, ob so angeordnete r Ebenen, P_0, $P_1 \ldots . P_{r-1}$, Fig. 16, Flächen einer und derselben Krystallzone sein können. Der Winkel, den irgend eine dieser r Ebenen mit der Ebene P_0 bildet, ist offenbar gegeben durch die Gleichung

$$P_n P_0 = nx;$$

setzt man in dieselbe für n der Reihe nach 0, 1, 2. . . . $r-1$, so erhält man nämlich alle r Ebenen. Aber auch wenn für n höhere Zahlenwerthe angenommen werden, gibt diese Gleichung nur Ebenen, die mit den r ursprünglichen zusammenfallen; Ebenen nämlich, welche sich von einander nur dadurch unterscheiden, dass sie mit P_0 Winkel bilden, die um ganze Vielfache von 180^0 differiren, sind ja identisch.

Alle durch diese Gleichung repräsentirten Ebenen werden aber nach §. 20 mögliche Flächen einer Krystallzone sein, sobald diess nur etwa die vier ersten dieser Ebenen sind, da ja die Winkel, welche dieselben unter einander bilden, die Werthe

$$P_0 P_1 = x, \quad P_0 P_2 = 2x, \quad P_0 P_3 = 3x$$

haben. Damit aber vier solche Ebenen mögliche Flächen eines Krystalles seien, muss ebenfalls zufolge §. 20 für den Winkel x das Verhältnis der Sehne zum Halbmesser von der Form $\sqrt{2 - \sqrt{m}}$ sein, wo m eine rationale Grösse bedeutet. Da nun unserer Annahme zufolge der Winkel x der $2r$. Theil von 360^0 ist, so wird die Sehne dieses Winkels offenbar die Seite eines regelmässigen $2r$Eckes, und wir können somit sagen:

I. „Sollen r tautozonale Ebenen, worunter keine parallelen, die isoschematisch mit Bezug auf sich selbst sind, mögliche Flächen eines

und desselben Krystalles sein, so muss r einen solchen Werth haben, dass das Verhältnis der Seite des regelmässigen $2r$Eckes zum Halbmesser des umgeschriebenen Kreises von der Form $\sqrt{2-\sqrt{m}}$ wird, unter m eine rationale Grösse verstanden."

Nun wissen wir aber aus der ebenen Geometrie, dass das Verhältnis der Seite des regelmässigen $2r$Eckes zum Halbmesser des umgeschriebenen Kreises sich nur für wenige spezielle Werthe von r durch Ausdrücke darstellen lässt, in denen keine höheren als Quadratwurzeln vorkommen. Unter dieser beschränkten Anzahl von Fällen sind es aber wiederum nur wenige, in welchen das betrachtete Verhältnis von der verlangten Form ist. Diese Fälle sind nebst den korrespondirenden Werthen des Verhältnisses s und des Winkels x:

$$r = 2 \quad s = \sqrt{2-\sqrt{0}} = \sqrt{2} \quad x = 90^0$$

$$r = 3 \quad s = \sqrt{2-\sqrt{1}} = \sqrt{1} \quad x = 60^0$$

$$r = 4 \quad s = \sqrt{2-\sqrt{2}} \quad x = 45^0$$

$$r = 6 \quad s = \sqrt{2-\sqrt{3}} \quad x = 30^0$$

Diess gibt also schliesslich den folgenden Satz:

II. „Es können, parallele Flächen ausgeschlossen, nur 2, 3, 4 oder 6 tautozonale Krystallflächen isoschematisch mit Bezug auf sich selbst sein."

Den ersten dieser Fälle, in welchem zwei Flächen auf einander senkrecht stehen, haben wir schon im §. 19 betrachtet, auch für den zweiten Fall brauchen wir nicht erst den hier geführten Beweis. Dieser Fall bezieht sich nämlich nur auf drei Flächen, den Winkeln zwischen drei Flächen können wir aber beliebige Werthe ertheilen, ohne dass dieselben aufhören, Flächen eines möglichen Krystalles zu sein. Kommen aber in einer Krystallzone Flächen vor, welche dem zweiten Falle entsprechen, so sind in derselben Zone auch immer Flächen möglich, welche dem letzten der angeführten Fälle entsprechen. In dem zweiten Falle bilden nämlich zwei Flächen, P_0 und P_2 mit der Fläche P_1 denselben Winkel von 60^0, für welchen das Verhältnis der Sehne zum Halbmesser gleich $\sqrt{2-\sqrt{1}}$ also von der Form $\sqrt{2-\sqrt{m}}$ ist. In der Zone $[P_0P_2]$ muss daher dem §. 20 zufolge zu jeder Fläche auch eine senkrechte Fläche möglich sein. Die Flächen P_3, P_4, P_5 nun, Fig. 17, welche senkrecht zu P_0, P_1 und P_2 sind, halbiren offenbar

die Winkel P_1P_2, P_2P_0, P_0P_1, und es entsprechen daher die sechs Flächen $P_0 \ldots P_5$ ersichtlich dem vierten der aufgezählten Fälle.

Auch der dritte Fall lässt sich auf ähnliche Art beweisen. Es werden nämlich immer Krystalle möglich sein, in welchen zwei Flächen, P_0, P_2 mit einer dritten tautozonalen Fläche P_1 gleiche Winkel von 45^0 bilden, Fig. 18. Da nun für diesen Winkel das Verhältnis der Sehne zum Halbmesser gleich $\sqrt{2-\sqrt{3}}$, also von der Form $\sqrt{2-\sqrt{m}}$ ist, so muss dem §. 20 zufolge in dieser Zone auch die Ebene P_3, welche mit P_0 den Winkel $135^0 = 3 \times 45^0$ bildet, eine mögliche Fläche sein.

Aus dem §. 20 ergibt sich aber auch, dass, wenn in einer Krystallzone vier oder sechs Flächen möglich sind, die isoschematisch mit Bezug auf sich selbst sind, überhaupt zu jeder Fläche Q dieser Zone, respective drei oder fünf Flächen möglich sein müssen, die mit dieser Fläche Q ebenfalls isoschematisch mit Bezug auf sich selbst sind, und daher ebenso wie die ursprünglichen vier oder sechs Flächen angeordnet sind. Dadurch, dass vier oder sechs tautozonale Krystallflächen isoschematisch mit Bezug auf sich selbst sind, wird ja den Voraussetzungen des Satzes III, §. 20 genügt, und es müssen daher alle Ebenen der betrachteten Zone mögliche Flächen sein, die mit einer Fläche derselben respektive Winkel von der Form $n.45^0$ oder $n.30^0$ bilden. Die möglichen Flächen solcher Zonen lassen sich daher in Gruppen von respektive je vier oder sechs Flächen, die isoschematisch mit Bezug auf sich selbst sind, abtheilen.

Es ist auch klar, dass, wenn in einer Krystallzone drei, vier oder sechs Flächen vorkommen, die isoschematisch mit Bezug auf sich selbst sind, diese Zone isoschematisch sein muss nach jeder ihrer Flächen.

Es soll jetzt folgender Satz bewiesen werden:

III. „In einer und derselben Krystallzone können nicht gleichzeitig vier und sechs Flächen isoschematisch mit Bezug auf sich selbst sein."

Könnte diess nämlich der Fall sein, so müssten in dieser Zone auch vier Flächen P, P', Q, R möglich sein, welche die Winkel

$$PP' = P'R = 45^0,\ P'Q = 30^0$$

mit einander bilden. Das anharmonische Verhältnis solcher vier Flächen ist aber irrational. Denn sind oP, oP', oQ, oR die Durchschnitte dieser Flächen, Fig. 19, mit einer zu ihnen senkrechten Ebene, p, p', q, r aber die Kreuzungspunkte dieser Linien mit einer zu oP' senkrechten Geraden, so hat man

$$pop' = p'or = 45^0,\ p'oq = 30^0,\ pp'o = op'r = 90^0$$
$$pp' = p'r = op',\ 2p'q = oq$$

und aus dem rechtwinkligen Dreiecke $p'oq$

$$pp'^2 = op'^2 = oq^2 - p'q^2 = 3p'q^2$$

Hiernach erhält man für das anharmonische Verhältnis der Flächen Q und R zu den Flächen P und P'

$$\frac{qp}{qp'} \cdot \frac{rp'}{rp} = \frac{pp' + p'q}{p'q} \cdot \frac{rp'}{2rp'} = {}^1\!/_2 \left(1 + \frac{pp'}{p'q}\right)$$
$$= {}^1\!/_2 (1 + \sqrt{3})$$

Dem letzten Ausdrucke zufolge ist nun das anharmonische Verhältnis irrational, daher solche vier Flächen, wie P, P', Q, R nicht in einer Krystallzone vorkommen können. Es ist aber in Folge dessen auch nicht möglich, dass in einer Krystallzone vier und sechs Flächen isoschematisch mit Bezug auf sich selbst sind, indem alsdann auch solche Flächen wie P, P', Q, R möglich sein müssten.

Schliesslich wollen wir noch, da diess des Nachfolgenden wegen von Interesse ist, die Anzahl und Anordnung der Ebenen kennen lernen, die mit einer beliebigen Ebene einen einfachen, nach r Ebenen P isoschematischen Komplex bilden, wenn jene Ebenen P tautozonal und isoschematisch mit Bezug auf sich selbst sind.

Nach dem früher Gesagten müssen solche r Ebenen P_0, $P_1 \ldots P_{r-1}$ so angeordnet sein, dass je zwei auf einander folgende einen Winkel gleich $\varphi = \frac{180^0}{r}$ bilden. Lassen wir diese Ebenen durch einen und denselben Durchmesser zz' einer Kugel gehen, welche uns als Sphäre der Projektion dienen soll, so werden uns, wenn der Zonenkreis jener Ebenen auch zugleich der Durchschnitt der Kugel mit der Ebene der Zeichnung sein soll, die Geraden p_0p_n, p_1p_{n+1}, $p_2p_{n+2} \ldots$, Fig. 20, die Schnitte jener r Ebenen mit der Kugel vorstellen. Alle diese Geraden werden sich natürlich in dem Punkte z schneiden müssen, welcher der Endpunkt des Durchmessers zz' ist, und welcher Punkt von jedem Punkte des Kreises $p_0 p_1 \ldots$ um 90^0 absteht. Ist nun in dem Stücke p_0zp_{n-1} dieser Kugel der Punkt o der Pol irgend einer beliebigen Ebene, so wird ein durch o und z gezogener grösster Kreis ebenfalls als gerade Linie erscheinen, welche die Zone p_0p_1 etwa im Punkte q_0 schneidet. Setzen wir den Winkel p_0q_0 gleich α und bestimmen auf dem Kreise $p_0\, p_1$ den Punkt q_1, so dass

$$q_0p_0 = p_0q_1 = \alpha;$$

legen dann durch die Punkte q_1 und z wieder einen grössten Kreis, auf welchem wir den Punkt 1 so bestimmen, dass der Bogen

$$0z = 1z$$

wird, so sind die Punkte 0 und 1 offenbar die Pole zweier Ebenen, welche mit Bezug auf die Ebene P_0 isoschematisch sind. In Folge der Symmetrie der ganzen Konstruktion ist ja klar, dass die Durchschnittslinie der Ebenen 0 und 1 in die Ebene $p_0 z$ entfällt, dass also diese drei Ebenen tautozonal sind. Offenbar müssen aber die Ebenen 0 und 1 auch gleich geneigt zur Ebene $p_0 z$, und daher wirklich isoschematisch mit Bezug auf die Ebene P_0 sein.

Hiernach ist auch leicht einzusehen, wie man den Pol 2 findet, welcher mit 1 isoschematisch nach der Ebene P_1 ist; es wird für den Pol 2 ersichtlich

$$q_1 p_1 = p_1 q_2, \quad 2z = 1z$$

sein müssen. Zu dem Pole 2 erhalten wir wieder einen Pol 3, der mit 2 isoschematisch nach P_2 ist, für welchen Pol

$$q_2 p_2 = p_2 q_3, \quad 3z = 2z$$

Setzen wir dieses Verfahren auf solche Weise fort, so ist jedenfalls so viel einleuchtend, dass jeder neue Pol mit Bezug auf den letzten in dem nächsten der Ausschnitte der Kugel liegen wird, in welche dieselbe durch die Ebenen P_0, P_1... getheilt wird, und dass keiner dieser Ausschnitte übersprungen wird, sowie auch klar ist, dass alle die so erhaltenen Pole gleich weit von z abstehen müssen. Sind wir bei der Ebene P_{r-1} angelangt und haben so den Pol r erhalten, so werden wir hierbei nicht stehen bleiben, sondern den Pol $r+1$ suchen, der mit r isoschematisch wieder nach der Ebene P_0 ist u. s. f. Um die Lage eines dieser so erhaltenen Pole, des Poles n etwa, vollkommen zu bestimmen, brauchen wir, da sie ja alle von dem Punkte z gleich weit abstehen, nur noch anzugeben, welches der Winkel zwischen p_0 etwa und dem Punkte q_n ist, in welchem der Kreis $p_0 p_1$ von einem durch z und den Pol n gelegten Kreis geschnitten wird.

Um nun den allgemeinen Ausdruck für den Winkel $p_0 q_r$, welcher immer nach derselben Seite von p_0 gezählt werden soll, zu finden, betrachten wir die Pole 1, 2, 3, 4, für welche wir ersichtlich haben:

$$\begin{aligned}
p_0 q_1 &= \alpha \\
p_0 q_2 &= p_0 q_1 + 2 q_1 p_1 = p_0 q_1 + 2(p_0 p_1 - p_0 q_1) = 2\varphi - \alpha \\
p_0 q_3 &= p_0 q_2 + 2 q_2 p_2 = p_0 q_2 + 2(p_0 p_2 - p_0 q_2) = \\
&= 2 p_0 p_2 - p_0 q_2 = 4\varphi - (2\varphi - \alpha) = 2\varphi + \alpha \\
p_0 q_4 &= p_0 q_3 + 2 q_3 p_3 = p_0 q_3 + 2(p_0 p_3 - p_0 q_3) = \\
&= 2 p_0 p_3 - p_0 q_3 = 6\varphi - (2\varphi + \alpha) = 4\varphi - \alpha
\end{aligned}$$

Diese Werthe kann man auch folgendermassen schreiben:

$$p_0 q_1 = \varphi - \frac{\varphi}{2} + \left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$p_0 q_2 = 2\varphi - \frac{\varphi}{2} + \left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$p_0 q_3 = 3\varphi - \frac{\varphi}{2} + \left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$p_0 q_4 = 4\varphi - \frac{\varphi}{2} - \left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right)$$

In dieser Form ist aber das Gesetz, nach welchem diese Winkel fortschreiten, ganz klar, und wir werden also für einen beliebigen Punkt q_n

$$p_0 q_n = n\varphi - \frac{\varphi}{2} - (-1)^n\left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right) \quad \ldots\ldots \quad (A)$$

haben. Das letzte Glied in diesem Ausdrucke rechts wird ersichtlich entweder positiv oder negativ, je nachdem n ungerade oder gerade ist, wie es auch durch die früheren vier speziellen Fälle gefordert wird. Die Richtigkeit dieser Formel liesse sich natürlich auch noch durch den Schluss von $n - 1$ auf n bestätigen.

Setzen wir nun in der letzten Gleichung n gleich $2r$, so erhalten wir einen Pol $2r$, für welchen

$$p_0 q_{2r} = 2r\varphi - \alpha$$

ist. Der Punkt q_{2r} wird hiernach mit dem Punkte q_0 zusammenfallen müssen; für letzteren Punkt haben wir ja, indem wir die Winkel alle nach derselben Richtung zählen

$$p_0 q_0 = 360^0 - \alpha$$

Es ist aber unserer Annahme zufolge $2r\varphi$ gleich 360^0, daher wirklich der Punkt q_{2r} identisch mit q_0 und also auch der Pol $2r$ identisch mit dem Pole 0, da ja beide auch gleich weit von z abstehen müssen. Sind wir somit bei unserem früheren Verfahren an den Pol $2r - 1$ gelangt, so wird eine Fortsetzung desselben keine neuen Pole mehr zum Vorschein bringen, da schon der nächste $2r$ mit 0 und daher auch alle weiteren mit den früheren zusammenfallen werden.

Die Pole 0, 1, 2... $2r - 1$ können offenbar nur einem einfachen Komplexe von Ebenen angehören, der nach $P_0, P_1 \ldots$ isoschematisch ist, da sie ja alle aus einem einzigen Pole 0 abgeleitet wurden. Ob diese Pole aber auch alle Flächen eines einfachen Komplexes sind, wird davon

abhängen, ob die Ebenen 0, 1... einen Komplex bilden, der isoschematisch nach jeder der r Ebenen $P_0, P_1 \ldots$ ist. Diess ist nun wirklich der Fall, und zum Beweise dessen genügt es offenbar zu zeigen, dass unter jenen Polen zu irgend einem beliebigen, n etwa, ein anderer vorhanden ist, der mit den ersteren nach irgend einer, P_s etwa, der Ebenen $P_0, P_1 \ldots$ isoschematisch ist. Für den Pol n werden wir nämlich haben

$$q_n p_s = p_0 p_s - p_0 q_n = s\varphi - \left\{ n\varphi - \frac{\varphi}{2} - (-1)^n \cdot \left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right)\right\}$$
$$= (s-n)\varphi + \frac{\varphi}{2} + (-1)^n \cdot \left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right)$$

für einen Pol $2s - n + 1$ aber

$$q_{2s-n+1} p_s = p_0 p_s - p_0 q_{2s-n+1}$$
$$= s\varphi - \left\{(2s-n+1)\varphi - \frac{\varphi}{2} - (-1)^{2s-n+1} \cdot \left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right)\right\}$$
$$= -(s-n)\varphi - \frac{\varphi}{2} + (-1)^{2(s-n)} \cdot (-1)^n \cdot \left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right)$$
$$= -\left\{(s-n)\varphi + \frac{\varphi}{2} + (-1)^n \cdot \left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right)\right\}$$

Vergleicht man nun diese beiden Ausdrücke mit einander, so sieht man sogleich, dass

$$q_{2s-n+1}\, p_r = - q_n p_s$$

ist, aus welcher Gleichung offenbar folgt, dass der Pol $2s - n + 1$ mit dem Pole n nach der Ebene P_s isoschematisch ist, da ja beide Pole gleich weit von z und wie die letzte Gleichung lehrt, auch gleich weit von P_s abstehen müssen. Würde die Zahl $2r - n + 1$ grösser sein als $2r - 1$, so bedeutet derselbe eigentlich den Pol $2s - n + 1 - 2r$, welcher ja mit dem früheren identisch ist.

Wir haben also durch das frühere Verfahren wirklich unsere Aufgabe gelöst und alle Ebenen bestimmt, die mit einer beliebigen Ebene einen einfachen, nach r Ebenen P isoschematischen Komplex bilden, welche Ebenen P tautozonal und isoschematisch mit Bezug auf sich selbst sind. Dieser einfache Komplex besteht, wie wir gesehen, aus $2r$ Ebenen, die sämmtlich zur Zonenaxe der Ebenen P gleich geneigt sind. Der Winkel je zweier aufeinander folgenden jener $2r$ Ebenen kann offenbar nur zweierlei verschiedene Werthe haben, welche Werthe in den aufeinanderfolgenden Winkeln immer mit einander abwechseln. Es ist ja, wie aus Gleichung A hervorgeht, der Winkel

$$q_n q_{n+1} = p q_{n+1} - p q_n$$
$$= (n+1)\varphi - \frac{\varphi}{2} - (-1)^{n+1} . \left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right)$$
$$= n\varphi + \frac{\varphi}{2} + (-1)^n . \left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right)$$
$$= \varphi + 2\,(-1)^n . \left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right)$$

und hat somit nur die zwei Werthe 2α und 2φ, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Was aber von Winkeln der Punkte q gilt, gilt wenigstens in qualitativer Hinsicht auch für die entsprechenden Pole selbst.

Der Umstand, dass wir den ursprünglichen Pol 0 in den Ausschnitt $p_{2r-1} z p_0$ versetzt haben, ist offenbar keine Beschränkung unserer Untersuchung, da wir ja die Stellenzeiger der Ebene P beliebig wählen können. Fällt der Punkt 0 jedoch in die Ebene P_0 selbst, ist also

$$q_0 p_0 = \alpha = 0$$

so reducirt sich die Anzahl der Pole des einfachen Komplexes auf r, indem immer je zwei, wie p_0 und p_1, p_2 und p_3 u. s. f. zusammenfallen müssen. Wovon man sich leicht auch mit Hilfe der Gleichung (A) überzeugt.

Ist in dem allgemeinen Falle r gerade, so ist $(-1)^r$ gleich $+1$ und daher für zwei Pole $n+r$ und n

$$p_0 q_{n+r} = (n+r)\,\varphi - \frac{\varphi}{2} - (-1)^{n+r} . \left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right)$$
$$= 180^0 + n\varphi - \frac{\varphi}{2} - (-1)^n . \left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right)$$
$$q_n\ q_{n+r} = p_0 q_{n+r} - p_0 q_n = 180^0$$

Hieraus folgt offenbar, dass die Kreise zn und $z\,(n+r)$ auf der Kugel zusammenfallen müssen, und dass daher die Pole n und $n+r$ nicht nur gleich geneigt zum Punkte z, sondern mit ihm auch tautozonal sind. Die Ebenen der Pole n und r werden daher isoschematisch sein nach der Ebene, deren Pol der Punkt z ist; diese Ebene wird aber offenbar die Ebene des Kreises $p_0 p_1$ sein und somit auf der Zone der Ebene P senkrecht stehen. Da n einen ganz beliebigen Pol vorstellt, so wird dasselbe auch von jedem anderen jener $2r$ Pole gelten, und wir werden somit den Satz aussprechen können:

IV. „Ist ein Ebenenkomplex isoschematisch nach r Ebenen P, die tautozonal und isoschematisch mit Bezug auf sich selbst sind, so ist dieser Komplex auch isoschematisch mit Bezug auf die zu jenen r Ebenen senkrechte Ebene, vorausgesetzt dass r eine gerade Zahl ist.“

§. 22. Isoschematische Krystalle.

Wir nennen in Uebereinstimmung mit dem für eine Krystallzone Gesagten nun auch einen Krystall isoschematisch mit Bezug auf eine Ebene R, wenn zu jeder Fläche desselben eine andere möglich ist, die mit ihr isoschematisch nach R ist, es sei denn, dass jene Fläche schon einzeln isoschematisch nach R ist. Es ist dieser Definition zufolge klar, dass, wenn ein Krystall isoschematisch mit Bezug auf eine Ebene R ist, diess auch für jede Zone desselben gilt, in welcher R liegt. Ein Krystall kann aber nur isoschematisch mit Bezug auf eine seiner Flächen sein. Denn sind P und Q zwei Flächen eines Krystalles, der nach der Ebene R isoschematisch ist, so werden an demselben zwei Flächen P' und Q' möglich sein müssen, wovon etwa P' mit P und Q' mit Q isoschematisch nach R ist. Die Ebene R muss daher der Definition isoschematischer Ebenen zufolge, in den zwei Krystallzonen $[PP']$ und $[QQ']$ liegen und daher selbst eine mögliche Fläche des Krystalles sein. Bedenkt man ferner, dass dem §. 19 zufolge sowohl in der Zone $[PP']$ als auch in der Zone $[QQ']$, welche beide nach R isoschematisch sind, eine Fläche möglich sein muss, welche auf R senkrecht steht, und dass, wenn wir die letzteren zwei Flächen mit S und T bezeichnen, R nicht nur senkrecht zu S und T, sondern auch zu jeder Fläche der Zone $[ST]$ sein muss, so können wir ersichtlich den folgenden Satz aussprechen:

I. „Ist ein Krystall isoschematisch nach einer Ebene, so ist diese Ebene eine mögliche Fläche des Krystalles und senkrecht zu einer möglichen Zone desselben."

Bei der Betrachtung isoschematischer Krystalle ist aber offenbar vor Allem die Frage zu lösen, ob, da die Flächen solcher Krystalle dem Gesetze der Rationalität der Indices gehorchen müssen, es denn überhaupt möglich ist, dass ein Krystall auch noch isoschematisch nach einer seiner Flächen sei. Diese Möglichkeit geht aber aus dem nachfolgenden Satze hervor, welcher lautet:

II. „Sind drei Flächen eines Krystalles, die nicht einer und derselben Zone angehören, isoschematisch mit Bezug auf die Fläche R, oder was eben so viel, sind die Kanten dreier Flächen eines Krystalls isoschematisch nach R, so ist auch der Krystall isoschematisch mit Bezug auf die Fläche R."

Wir haben hiebei zwei Fälle zu unterscheiden. Sollen nämlich drei Ebenen, die nicht in einer Zone liegen, isoschematisch sein mit Bezug auf eine Fläche R, so müssen sie entweder alle einzeln isoschema-

tisch sein, indem eine parallel R ist, die anderen aber auf R senkrecht stehen, oder aber, es sind zwei dieser Flächen paarweise isoschematisch zur Fläche R, während die dritte auf ihr senkrecht steht (§. 17).

Beweisen wir den angegebenen Satz zuerst für den ersten Fall, in welchem von den drei nach R isoschematischen Flächen des Krystalles zwei, etwa P und Q, auf R senkrecht stehen, die dritte aber ihr parallel, also die Fläche R selbst ist. Letztere Fläche ist somit senkrecht zu den Flächen P und Q, und daher offenbar auch zu jeder Fläche der Zone $[PQ]$. Ist nun M irgend eine Fläche des Krystalles, so wird die Ebene N, welche in den beiden Zonen $[MR]$ und $[PQ]$ liegt, eine mögliche Fläche des Krystalles sein; dieselbe wird aber nach dem eben Gesagten senkrecht stehen müssen auf der Fläche R, woraus nach §. 19 folgt, dass die Zone $[NMR]$ isoschematisch mit Bezug auf R und N ist. Es wird daher in dieser Zone zur Fläche M offenbar eine andere M' möglich sein müssen, die mit ihr isoschematisch nach der Fläche R ist. Hiermit ist aber unser Satz für den ersten Fall bewiesen, da ja, was von der Ebene M gilt, auch von jeder anderen Fläche des Krystalles gelten muss.

Beziehen wir den Krystall auf ein Axensystem, dessen Richtungen durch die Durchschnitte der Flächen P, Q, R, dessen Längen aber durch die Abschnitte irgend einer anderen Fläche des Krystalles gebildet werden, so haben wir Symbole, wie $P(100)$, $R(010)$, $Q(001)$, $M(hkl)$. Das Symbol von N wird alsdann offenbar (hol), aber auch das Symbol von M' können wir leicht mit Hilfe des §. 19 bestimmen, da wir ja nebst dem Symbole von M auch die Symbole der zwei zu einander senkrechten Flächen R und N kennen. Wir finden[1] auf diese Weise für M' das Symbol $(h\bar{k}l)$, welches sich von dem für M nur durch das Vorzeichen desjenigen Index unterscheidet, der sich auf die zur Fläche R senkrechte Axe bezieht. Von den drei Axenrichtungen, welche in diesem Falle ja auch isoschematisch nach R sind, werden zwei, nämlich $[PR]$ und $[QR]$ parallel der Fläche R sein, während die dritte $[PQ]$ auf dieser Fläche senkrecht steht. Man überzeugt sich für

---

[1]) Es ist nämlich, wenn h', k', l' die unbekannten Indices der Fläche M' sind,

$$\left[\frac{hkl,\ 010}{hkl,\ hol}\right] = \left[\frac{\bar{l}\ o\ h}{kl,\ o,\ \overline{hk}}\right] = -\frac{1}{k}$$

$$h' = o - h \ .\ \frac{1}{k} = h$$

$$k' = l - o \ .\ \frac{1}{k} = \bar{k}$$

$$l' = o - l \ .\ \frac{1}{k} = l$$

ein solches Axensystem von der Richtigkeit des Gesagten auch leicht durch unmittelbare geometrische Anschauung. Ist z. B. die X und Z Axe parallel der Fläche R, die Y Axe aber senkrecht zu ihr, und also auch zur Axenebene XZ oder (010), so werden die Flächen $M\,(hkl)$ und $M'\,(h\bar{k}l)$, welche für jedes Axensystem die Ebene XZ in parallelen Linien schneiden, auch gleich geneigt zu dieser Ebene sein, da ja zu beiden Seiten der XZ Ebene für diese Flächen sich alles gleich verhält. Wir nennen ein solches Axensystem, dessen Richtungen einzeln isoschematisch nach R sind, dessen Längen aber durch eine beliebige andere Fläche des Krystalles bestimmt werden, ein nach der Fläche R isoschematisches Axensystem der ersten Art.

Um aber den Satz II auch für den zweiten der möglichen Fälle zu beweisen, nehmen wir an, dass die Flächen P und P' isoschematisch nach R geneigt seien, während die Fläche Q auf ihr senkrecht steht. Die Zone $[PQ'R]$ ist alsdann offenbar nach Satz II isoschematisch nach der Fläche R und daher auch eine Ebene T, welche in dieser Zone senkrecht auf R steht, eine mögliche Fläche des Krystalles. Die Flächen Q, T und R geben aber in Verbindung mit irgend einer weiteren Fläche des Krystalles ein nach R isoschematisches Axensystem der ersten Art, für welches wir den Satz II bewiesen haben. Es ist also wirklich unter den gemachten Voraussetzungen zu jeder Fläche M des Krystalles eine mit ihr nach R isoschematische Fläche M' möglich und somit der Satz II auch in diesem Falle giltig. Wir wollen wieder das Symbol von M' ermitteln, falls die Axenrichtungen des Krystalles durch die Kanten der drei nach R isoschematischen Flächen P, P' und Q bestimmt werden. Es sei also $P\,(100)$, $P'\,(010)$, $Q\,(001)$, $M\,(hkl)$, geben wir dann der Fläche R, welche in der Zone $[PP']$ den einen Neigungswinkel der Fläche PP' halbirt, das Symbol $(\bar{1}10)$, so wird das Symbol der den anderen Neigungswinkel halbirenden Ebene T gleich (110)[1]. Das Symbol der Fläche N, welche in den beiden Zonen $[MR]$ und $[PQ]$ liegt, wird alsdann $M([\bar{l}, l, h+k]\ [1\bar{1}0]) =$ $= (h+k,\ h+k,\ 2l)$. Nun ist aber R senkrecht zu N, da ja R senkrecht zu Q und T und also auch senkrecht zu jeder Fläche der Zone $QT]$ ist; es ist daher M mit M' isoschematisch sowohl nach R als

---

[1] Der §. 19 gibt nämlich, wenn u, v, w die zu bestimmenden Indices der Fläche T sind

$$\left[\frac{(\bar{1}10)\ (100)}{(\bar{1}10)\ (010)}\right] = \left[\frac{00\bar{1}}{00\bar{1}}\right] = 1$$

$$u = 1 + 0\ .\ 1 = 1$$
$$v = 0 + 1\ .\ 1 = 1$$
$$w = 0 + 1\ .\ 1 = 0$$

auch nach N, und da uns die Symbole von M, R, N bekannt sind, so können wir nach §. 19 das Symbol von M' berechnen, für welches wir (khl)[1]) erhalten, und das von dem für M nur durch die Vertauschung der Indices, die sich auf die beiden zu R gleich geneigten und gleich langen Axen beziehen, unterschieden ist.

Auch hievon überzeugt man sich leicht durch direkte geometrische Anschauung. Wir haben in diesem Falle zwei Axenrichtungen, etwa XX' und YY', Fig. 21, isoschematisch mit Bezug auf die Fläche R, die dritte Axe ZZ' aber dieser Fläche parallel; denken wir uns daher die Fläche R so verschoben, dass sie durch die Linie ZZ' selbst geht, so wird sie die Fläche XOY in einer Linie OH schneiden, so dass

$$pl\ XOY \perp pl\ ZOH, \quad XOH = HOY$$

weil ja eben XX' mit YY' isoschematisch nach der Fläche HOZ sein soll. Hieraus folgt aber, dass die Axe ZZ' sich ganz gleich gegen OX und OY verhält, und dass daher offenbar der Winkel

$$XOZ = YOZ$$

sein muss. Verschieben wir nun die Fläche R, nämlich $pl\ ZOH$, so dass sie die Axe OY etwa im Punkte B, die Axen OX aber im Punkte A' schneidet, so wird

$$BA' \parallel OH$$

sein, da ja diese zwei Linien Durchschnitte paralleler Ebenen mit einer dritten Ebene sind. Hieraus folgt, dass

$$OA'B = XOH = HOY = OBA'$$

dass somit das Dreieck $A'OB$ ein gleichschenkliges und

$$A'O = BO$$

ist. Machen wir nun auf der entgegengesetzten Hälfte der Linie OX

$$OA = OA' = OB$$

so können wir OA und OB als Längen der X und YAxe betrachten und die Länge OC der dritten Axe leicht durch irgend eine andere Fläche des Krystalles bestimmen. Wir haben nun ein Axensystem, in

---

[1]) Sind h', k', l' die noch unbekannten Indices der Fläche M', so ist

$$\left[\frac{(hkl)\ (\bar{1}10)}{(hkl)\ .\ (h+k,\ h+k,\ 2l)}\right] = \left[\frac{\bar{l},\ \bar{l},\ h+k}{kl-hl,\ kl-hl,\ h^2-k^2}\right] = \frac{1}{h-k}$$

$$h' = -1 + (h+k)\frac{1}{h-k} = -h+k+h+k = 2k = k$$

$$k' = 1 + (h+k)\frac{1}{h-k} = h-k+h+k = 2h = h$$

$$l' = 0 + 2l\ .\ \frac{1}{h-k} = 2l = 2l = l$$

welchem zwei Axen (X, Y) gleich zu der dritten geneigt und unter einander gleich lang sind, ein solches Axensystem nennen wir ein nach der Fläche R isoschematisches Axensystem der zweiten Art. Zwei Flächen nun, deren Symbole $M(hkl)$ und $M(khl)$ werden, wenn wir uns dieselben durch die Punkte A und B verschoben denken, die drei Axen in folgender Entfernung schneiden:

$$M \ldots . OA, \qquad OF = \frac{h}{k} . OB, \qquad OG = \frac{h}{l} . OC$$

$$M' \ldots . OE = \frac{h}{k} . OA, \quad OB, \qquad OG = \frac{h}{l} . OC$$

da aber OA gleich OB ist, so muss in diesem Schema

$$OE = OF$$

sein, und es müssen, da die Winkel XOH und HOY ebenfalls einander gleich sind, und somit alles zu beiden Seiten der Linie OH symmetrisch ist, die beiden Linien AF und BE sich in einem Punkte J der Linie OH schneiden.

Der Punkt J und der Punkt G gehören somit allen drei Flächen, AFG, BEG, GOH an, deren gemeinsame Durchschnittslinie GJ ist. Die drei Flächen M, M', R liegen also in einer und derselben Zone; die beiden Flächen M und M', sind aber offenbar auch gleich geneigt zu R, weil alle entsprechenden Winkel und Linien zu beiden Seiten der Ebene GOH einander gleich sind. Es ist somit bewiesen, dass die zwei Flächen M und M', welche sich nur durch die Vertauschung der auf die gleich langen Axen sich beziehenden Parameter unterscheiden, wirklich isoschematisch nach der Fläche R sind. Wir können also, wenn wir das für den ersten Fall Bewiesene berücksichtigen, noch folgenden Satz aussprechen:

III. „Will man für eine Fläche eines Krystalls, der sich auf ein nach der Fläche R isoschematisches Axensystem beziehen lässt, das Symbol der Fläche finden, welche mit der ersteren nach R isoschematisch ist, so braucht man nur die erstere Fläche auf das isoschematische Axensystem zu beziehen und dann in dem so erhaltenen Symbol, wenn das Axensystem ein isoschematisches der ersten Art ist, den Index, der sich auf die zur Fläche R senkrechten Axe bezieht, mit entgegengesetzten Zeichen zu nehmen, wenn aber das Axensystem ein isoschematisches der zweiten Art ist, die Indices zu vertauschen, die sich auf die beiden, gleich langen Axen beziehen.“

Es ist leicht einzusehen, dass auch die Umkehrung der Sätze II. und III gelten wird, und dass wir daher sagen können:

IV. „Ist ein Krystall isoschematisch nach einer seiner Flächen, so lässt er sich immer auf isoschematische Axensysteme der ersten und zweiten Art beziehen.“

Denn ist der Krystall isoschematisch nach der Fläche R, so werden zu den Flächen P und Q desselben zwei andere P und Q vorhanden sein, so dass P mit P' und Q mit Q' isoschematisch nach R ist. Hieraus folgt aber, dass in der Zone $[PRP']$ eine Fläche S möglich sein muss, die senkrecht zu R ist und ebenso in der Zone $[QRQ']$ eine zu R senkrechte Fläche T. Die Flächen S, T, R geben aber ersichtlich ein isoschematisches Axensystem der ersten Art, während z. B. die Flächen P, P', T in Verbindung mit S ein nach R isoschematisches Axensystem der zweiten Art geben. Aus dem eben Gesagten kann man aber, wenn man bedenkt, dass P, P' und Q, Q' nur zwei Zonen des Krystalles angehören, auch folgenden Satz ableiten, von dem der Satz IV offenbar nur ein specieller Fall ist.

V. „Sind zwei Zonen eines Krystalles isoschematisch nach einer Fläche desselben, so ist auch der Krystall selbst isoschematisch nach dieser Fläche.“

Nun wissen wir aber aus §. 19, dass, soll eine Krystallzone isoschematisch nach einer ihrer Flächen sein, die Elemente dieses Krystalles einer Bedingung unterworfen sind; es muss nämlich, damit die Zone isoschematisch werde, in derselben der Neigungswinkel zweier Flächen entweder gleich dem zweier anderen Flächen oder aber gleich 90^0 sein. Sollen also zwei Zonen eines Krystalles und somit der Krystall selbst isoschematisch nach einer seiner Flächen sein, so werden die Elemente nach Satz V auch zwei Bedingungen zu erfüllen haben. Es ergibt sich hieraus, dass wirklich nach einer Fläche isoschematische Krystalle möglich sind, wir können ja, ohne dass ein Krystall aufhört, möglich zu sein, für dessen Elemente beliebige Bedingungen aufstellen, wenn nur deren Zahl nicht fünf übersteigt.

Zu demselben Resultate gelangen wir auch durch die Betrachtung des Satzes IV, wodurch wir sogleich, allerdings nur für ein bestimmtes Axensystem, die Bedingungen kennen lernen, welche die Elemente eines Krystalles erfüllen müssen, damit derselbe isoschematisch nach einer seiner Flächen sei. Der Satz IV sagt nämlich, dass sich ein solcher Krystall immer auf ein isoschematisches Axensystem der ersten und zweiten Art beziehen lässt. Für den ersten Fall haben wir aber die Bedingung, dass zwei Axenwinkel gleich 90^0 sind, während im zweiten Falle zwei Axenwinkel und zwei Axenlängen einander gleich sein müssen, was uns wieder in jedem Falle zwei Bedingungen für die Elemente des nach einer seiner Flächen isoschematischen Krystalles gibt.

§. 23. Krystalle, die isoschematisch nach mehreren Flächen sind.

Betrachten wir jetzt solche Krystalle, die isoschematisch mit Bezug auf zwei ihrer Flächen sind, so haben wir dem §. 20 zufolge sogleich den folgenden Satz:

I. „Ist ein Krystall isoschematisch nach zwei seiner Flächen, so muss für den Neigungswinkel dieser zwei Flächen das Verhältnis der Sehne zum Halbmesser von der Form $\sqrt{2 - \sqrt{m}}$ sein, unter m eine rationale Grösse verstanden."

Soll nämlich ein Krystall isoschematisch nach zwei Flächen sein, so muss diess offenbar auch die Zone dieser zwei Flächen sein, letzteres ist aber nach §. 20 nur möglich, wenn für den Neigungswinkel dieser zwei Flächen die obige Beziehung stattfindet. Mit Bezug auf solche Krystalle haben wir aber den zweiten Satz:

II. „Ist ein Krystall isoschematisch nach zwei seiner Flächen, so ist derselbe auch isoschematisch nach der zu diesen zwei Flächen senkrechten Ebene, welche eine mögliche Fläche des Krystalles ist."

Ist der Krystall z. B. isoschematisch nach den Flächen P und Q, so müssen dieselben nach dem vorhergehenden Paragraphe senkrecht stehen jede auf einer möglichen Zone des Krystalles. Eine Ebene R nun, die in diesen zwei möglichen Zonen liegt, wird eine mögliche Fläche des Krystalles sein und senkrecht stehen auf P und Q. Die drei Flächen P, Q, R sind aber offenbar isoschematisch nach R und der Krystall nach §. 22 somit ebenfalls isoschematisch mit Bezug auf die Fläche R, was zu beweisen war. Auch der folgende Satz ist leicht zu beweisen:

III. „Ist ein Krystall isoschematisch nach zwei seiner Flächen, die nicht aufeinander senkrecht stehen, so ist er isoschematisch nach jeder in der Zone dieser zwei Flächen möglichen Fläche und natürlich auch nach der zu dieser Zone senkrechten Fläche."

Der zweite Theil dieses Satzes ist nämlich nur eine Wiederholung des Satzes II; wir wollen wie früher die zu den ursprünglichen Flächen P, Q senkrechte Ebene, welche eine mögliche Fläche sein muss, R nennen. Wie schon gesagt, muss ferner, wenn ein Krystall isoschematisch nach zwei Flächen ist, diess auch für die Zone dieser zwei Flächen stattfinden; ist aber eine Zone isoschematisch nach zwei Flächen, die nicht auf einander senkrecht stehen, so ist zu jeder Fläche S in derselben eine dazu senkrechte Fläche T möglich. Die Flächen R, S, T stehen somit wechselweise aufeinander senkrecht, und sind somit isosche-

matisch nach einer jeden von ihnen. Es wird also auch der Krystall isoschematisch sein müssen nach jeder der drei Flächen R, S, T, womit, da S eine beliebige Fläche in der Zone $[PQ]$ vorstellt, der angeführte Satz allgemein bewiesen ist.

Endlich finden wir den folgenden Satz:

IV. „Ist ein Krystall isoschematisch nach drei Flächen, von denen höchstens zwei auf einander senkrecht stehen, so ist der Krystall isoschematisch mit Bezug auf eine jede seiner Flächen."

Es seien P, Q, R die Flächen, mit Bezug auf welche der Krystall isoschematisch ist, und welche höchstens einen rechten Winkel unter einander bilden. S sei ferner eine beliebige andere Fläche des Krystalles, von der nun bewiesen werden soll, dass der Krystall isoschematisch auch mit Bezug auf diese Fläche sein muss. Sind M und N die Flächen, welche in den Zonen $[TS]$, $[RQ]$ und $[TS]$, $[RP]$ liegen, so wird der Krystall nach diesen beiden Flächen wegen Satzes III isoschematisch sein müssen, da der Annahme zufolge weder P noch Q senkrecht zu R ist. In der Zone von M und N liegt aber die Fläche S, und der Krystall wird daher demselben Satze zufolge auch nach dieser Fläche isoschematisch sein müssen; denn wäre auch etwa die Neigung MN zufällig gleich 90^0, so braucht man nur eine andere Fläche T zur Bestimmung der beliebigen Zone $[ST]$ zu wählen.

§. 24. Krystallflächen, die isoschematisch mit Bezug auf sich selbst sind.

Des Nachfolgenden wegen wird es jetzt nöthig sein, zu untersuchen, ob jede oder nur eine bestimmte Anzahl von Krystallflächen isoschematisch mit Bezug auf sich selbst angeordnet sein kann, und welches die Art einer solchen Anordnung sein muss. Unter Ebenen, die isoschematisch mit Bezug auf sich selbst sind, verstehen wir, wie schon im §. 17 gesagt, solche, die einen Komplex bilden, der isoschematisch nach jeder seiner Ebenen ist. Wir haben ferner im §. 21 auch gesehen, dass sich n Ebenen immer isoschematisch nach sich selbst anordnen lassen, man braucht sie ja nur durch eine und dieselbe Linie so hindurch zu legen, dass sie den Raum um diese Linie herum in lauter gleiche Theile theilen. Die n Ebenen sind dann tautozonal, und je zwei benachbarte bilden einen Winkel von $\frac{180^0}{n}$.

Verbindet man so angeordnete n Ebenen mit einer zu ihnen senkrechten Ebene, so ist auch dieser Komplex von $n + 1 = m$ Ebenen noch isoschematisch mit Bezug auf sich selbst, indem die neu hinzu-

tretende Ebene isoschematisch zu jeder der ursprünglichen n Ebenen und diese umgekehrt einzeln isoschematisch zu der neuen Ebene sind.

Eine beliebige Anzahl von Ebenen lässt sich nur auf diese beiden Arten so im Raume anordnen, dass die Ebenen isoschematisch mit Bezug auf sich selbst sind. Nur in zwei speziellen Fällen ist noch eine dritte Art einer solchen Anordnung möglich. In dem ersten dieser speziellen Fälle hat man sechs Ebenen, deren Neigungen zu einander dieselben sein müssen, wie von sechs Ebenen, die parallel den Flächenpaaren des regelmässigen Dodekaeders der Stereometrie sind. Je fünf dieser Ebenen sind isoschematisch mit Bezug auf die sechste, und zwar sind vier von ihnen paarweise isoschematisch zur sechsten geneigt, während die fünfte senkrecht zu der letzteren Fläche ist.

Lässt man zu diesen sechs Ebenen noch die drei hinzutreten, welche die von den sechs Ebenen gebildeten rechten Winkel halbiren, so erhält man den zweiten speziellen Fall, in welchem sich jetzt neun Ebenen noch auf eine dritte Art isoschematisch mit Bezug auf sich selbst anordnen lassen. Man kann sich diese Anordnungen von neun Ebenen wie früher durch die sechs Flächenpaare des regelmässigen Dodekaeders und durch die drei Paare von Ebenen vorstellen, welche die vierflächigen Ecken des Dodekaeders gerade abstumpfen, wie diess in Fig. 22 dargestellt ist.

Sprechen wir im Nachfolgenden von einer Anzahl von Ebenen, die isoschematisch mit Bezug auf sich selbst sind, so werden wir zur Abkürzung durch eine vor die (mit arabischer Ziffer bezeichnete) Zahl der Ebenen gesetzte lateinische Ziffer diejenige der drei Arten bezeichnen, nach welcher die Ebenen angeordnet sind. So bedeutet II5 fünf Ebenen, welche nach der zweiten der gegebenen Arten isoschematisch mit Bezug auf sich selbst angeordnet sind. Von der dritten Anordnungsart haben wir nur die zwei speziellen Fälle III6 und III9.

Es lassen sich also n Ebenen, unter denen keine parallelen, immer im Raume so anordnen, dass sie isoschematisch mit Bezug auf sich selbst sind. Diess ist jedoch nicht mehr der Fall, sollen diese n Ebenen zu gleicher Zeit mögliche Flächen eines und desselben Krystalles sein. Denn was gleich die erste Anordnungsart betrifft, so haben wir schon im §. 21 gesehen, dass n tautozonale Krystallflächen nur für die Fälle, in welchen $n = 1, 2, 3, 4$ oder 8 ist, isoschematisch mit Bezug auf sich selbst sein können.

Es wird daher auch die zweite Anordnungsart von n Ebenen, bei der $n - 1$ dieser Ebenen tautozonal und auch isoschematisch mit Bezug auf sich selbst sind, höchstens in den Fällen möglich sein, wo $n - 1$

gleich 1, 2, 3, 4 oder 6 ist. Dass diese Anordnungsart aber für die Werthe $n = 2, 3, 4, 5$ oder 7 wirklich möglich ist, davon überzeugt man sich leicht mit Hilfe des §. 15, wo wir gezeigt, dass, wenn eine gewisse Zone an Krystallen überhaupt möglich ist, auch immer Krystalle möglich sind, bei denen nebst dieser Zone noch eine unter gegebenen Winkeln zu derselben geneigte Fläche auftritt. Nun wissen wir, dass an Krystallen Zonen mit 1, 2, 3, 4 oder 6 Flächen, die isoschematisch nach sich selbst sind, vorkommen können, es sind daher auch Krystalle möglich, wo nebst einer solchen Zone auch noch eine zu derselben senkrechte Fläche auftritt.

Bei der dritten Anordnungsart, welche sich bloss auf die speziellen Fälle $n = 6$ und $n = 9$ bezieht, haben wir nur Zonen, in welchen sich entweder zwei oder drei Ebenen unter gleichen Winkeln schneiden. Diesen Anordnungen wird daher durch §. 21 nicht widersprochen, dass sie aber für Krystallflächen wirklich möglich sind, haben wir schon im §. 7 bewiesen, wo wir gesehen, dass die Ebenen des regulären Hexaeders und Dodekaeders, und zwar auch gleichzeitig, Flächen eines Krystalles sein können.

Bedenkt man noch, dass die mit I2 und II2 bezeichneten Anordnungen identisch sind, da sie uns beide zwei zu einander senkrechte Flächen geben, so folgt aus dem bisher Gesagten, dass für Flächen eines Krystalles, welche isoschematisch mit Bezug auf sich selbst sein sollen, nur folgende Anordnungen wirklich möglich sind:

I1, I2, I3, I4, I6;
II3, II4, II5, II7;
III6, III9.

§. 25. Charakteristische Flächenkomplexe der Krystalle.

Unter den Flächen, mit Bezug auf welche ein Krystall bei jeder 'emperatur isoschematisch ist, werden sich Gruppen finden, die iso-:hematisch mit Bezug auf sich selbst sind. Von solchen Flächenkom-lexen eines Krystalles sind, wie wir im nächsten Kapitel sehen werden, sonders diejenigen von Wichtigkeit, welche die grösste Anzahl von lächen aufweisen. Sei es, dass nur ein solcher Komplex oder mehrere rselben von gleicher Flächenanzahl an einem Krystalle vorhanden sind, ir bezeichnen dieselben immer als charakteristische Flächen-omplexe der Krystalle.

Fragen wir nach der Anzahl und Anordnung der an Krystallen berhaupt möglichen charakteristischen Flächenkomplexe, so ist dem

vorhergehenden Paragraphe zufolge klar, dass andere Anordnungen als die mit den Symbolen

I1, I2, I3, I4, I6,
II3, II4, II5, II7,
III6, III9

bezeichneten für charakteristische Flächenkomplexe der Krystalle jedenfalls unmöglich sind, da ja die Flächen solcher Komplexe isoschematisch mit Bezug auf sich selbst sein müssen. Für einige der angeführten Anordnungen können wir aber leicht nachweisen, dass, wenn ein Krystall wirklich nach den so angedeuteten Flächen isoschematisch ist, er es auch noch nach anderen Flächen sein muss, die mit den ursprünglichen isoschematisch mit Bezug auf sich selbst sind. Es ist dann erst die Vereinigung dieser beiderlei Flächen ein charakteristischer Flächenkomplex, welche einer höheren der angeführten Anordnungen entsprechen muss, da ja andere Anordnungen gar nicht möglich sind. So finden wir, dass, wenn ein Krystall isoschematisch ist nach den Flächen der Anordnungen I2, I3, I4 oder I6, dann dem §. 22 zufolge der Krystall auch isoschematisch nach einer zu diesen Flächen senkrechten Fläche sein muss, welche mit den früheren Flächen offenbar einen Komplex von Flächen gibt, die isoschematisch mit Bezug auf sich selbst sind, und den Anordnungen II3, II4, II5 oder II7 entsprechen.

Aber auch unter den letzteren Anordnungen finden wir, dass, wenn ein Krystall isoschematisch ist mit Bezug auf Flächen, die nach II4 angeordnet sind, der Krystall es auch mit Bezug auf durch II7 repräsentirte Flächen sein muss. Zeichnen wir uns, um uns eine bessere Vorstellung von der Anordnung dieser Flächen zu machen, die Durchschnitte derselben mit einer Kugel, deren Zentrum der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt dieser Flächen sein soll, so haben wir in Fig. 25 für den Fall I4 die Fläche T senkrecht zu drei unter Winkeln von 60^0 gekreuzten Flächen P, Q, R. Ist nun ein Krystall isoschematisch nach diesen Flächen, so wird er es auch nach den Flächen P', Q', R' sein müssen, die senkrecht sind beziehungsweise zu den Flächenpaaren PT, QT, RT. Die drei Flächen P', Q', R' werden, da sie senkrecht zu T sind, mit P, Q, R in einer Zone liegen, und werden die Winkel zwischen je zwei der letzteren Flächen halbiren. Die sieben Flächen T, P, P'.... werden daher genau die Anordnung haben, welche das Symbol II7 erfordert.

Schliesslich kann auch die Anordnung III6 nicht für einen charakteristischen Flächenkomplex statthaben. Ist nämlich ein Krystall

isoschematisch nach den Flächen eines regulären Dodekaeders, Fig. 26, P, Q, R, P', Q', R', so wird er es auch auf die drei Ebenen U, V, W sein müssen, die senkrecht stehen auf je zwei der früheren Flächen, die mit einander einen Winkel von 90° bilden. Durch Betrachtung des regulären Dodekaeders überzeugt man sich leicht, dass diese drei Ebenen die vierflächigen Ecken des Dodekaeders gerade abstumpfen und daher mit den ursprünglichen 6 Ebenen einen der Anordnung III9 entsprechenden Komplex bilden.

Es bleiben uns also für charakteristische Flächenkomplexe der Krystalle nur folgende Anordnungen über:

I1, II3, II5, II7, III9,

von denen wir bis jetzt so viel wissen, dass andere Anordnungen für jene Flächenkomplexe nicht möglich sind. Ob aber diese sechs Anordnungen selbst möglich sind, wissen wir bis jetzt noch nicht, sondern erst dann, wenn wir gezeigt haben, dass für diese Anordnungen wirklich Krystalle möglich sind, die isoschematisch nach allen Flächen der betreffenden Anordnung sind. Für die Anordnung I1, welche nur aus einer einzigen Fläche besteht, haben wir gezeigt, dass die Elemente eines Krystalles nur zwei Bedingungen zu erfüllen brauchen, damit derselbe isoschematisch nach einer seiner Flächen sei. Aber auch für die übrigen Anordnungen werden wir leicht die Möglichkeit ihres Auftretens an Krystallen nachweisen können. Wir wissen nämlich aus dem vorigen Paragraphe, dass Krystalle möglich sind, an denen Flächen vorkommen, deren Anordnung irgend einem der Symbole II3, II5, II7 oder III9 entsprechen kann. Für solche Krystalle gilt aber der folgende Satz:

„Kommen an einem Krystalle Flächen vor, welche nach einer der Anordnungen II3, II5, II7 oder III9 isoschematisch mit Bezug auf sich selbst sind, so ist der Krystall isoschematisch nach jeder dieser Flächen.“

Dieser Satz ist aber nur eine unmittelbare Folge des §. 22, wo wir bewiesen haben, dass, wenn zwei Flächen eines Krystalles senkrecht auf einer dritten, nicht tautozonalen Fläche stehen, der Krystall nach letzterer Fläche isoschematisch sein muss. Betrachten wir nun die Anordnungen II3, II5, II7, III9, Fig. 23—26, so finden wir wirklich, dass in denselben zu jeder Fläche zwei andere vorhanden sind, die auf ihr senkrecht stehen, womit also der aufgestellte Satz bewiesen ist.

Jedes der obigen fünf Symbole kann somit wirklich die charakteristischen Flächenkomplexe eines Krystalls vorstellen, da dieselbe auch von einander unabhängig sind, ein niedriges dieser Symbole also keineswegs ein höheres bedingt, und da, wie wir später sehen werden,

auch kein Widerspruch herbeigeführt wird durch die Bedingung, welche verlangt, dass der Krystall bei jeder Temperatur nach den Flächen eines charakteristischen Komplexes isoschematisch sei.

Mit Hilfe des zuletzt bewiesenen Satzes kann man auch leicht die Frage beantworten nach der Zahl der Bedingungen, welche die Elemente eines Krystalles erfüllen müssen, soll an demselben ein charakteristischer Flächenkomplex vorkommen, welcher einem der früheren Symbole entspricht. Wir brauchen ja bloss zu untersuchen, welches die Anzahl der Bedingungen ist, damit Flächen eines Krystalles isoschematisch mit Bezug auf sich selbst nach dem betreffenden jener Symbole angeordnet sind.

Damit nun drei Flächen nach der Anordnung I3 an einem Krystalle vorkommen, müssen die Elemente desselben offenbar drei Bedingungen erfüllen, es sollen ja die Neigungen dreier nicht tautozonaler Flächen gleich 90° sein.

Für nach II5 und II7 angeordnete Flächen sind die Elemente vier Bedingungen unterworfen, in beiden Fällen sollen ja nebst den Ebenen einer bestimmten Zone *Z* auch die zu dieser Zone senkrechte Ebene *R* mögliche Flächen sein. Zugleich sieht man, dass ein solcher Krystall isoschematisch sein wird nach jeder Fläche der Zone *Z*, da wir ja im §. 20 gezeigt haben, dass in Zonen, in denen 4 oder 6 unter gleichen Winkeln geneigte Flächen vorkommen, zu jeder Fläche *S* eine senkrechte Fläche *T* möglich sein muss: die Fläche *S* ist also senkrecht zu den zwei Flächen *R* und *T*, und daher der Krystall isoschematisch mit Bezug auf *S*. In der Zone *Z* werden ferner zu jeder Fläche *S* beziehungsweise 3 oder 5 andere Flächen möglich sein, die mit *S* isoschematisch mit Bezug auf sich selbst sind, und die daher mit den Flächen *S* und *R* einen Komplex geben, der beziehungsweise nach dem Symbol II5 oder II7 angeordnet ist. Wir werden also bei Krystallen, für welche 5 oder 7 die höchste Anzahl von Flächen ist, nach denen der Krystall bei jeder Temperatur isoschematisch ist, und die isoschematisch mit Bezug auf sich selbst sind, eine unbestimmte Anzahl charakteristischer Flächenkomplexe haben, die im ersten Falle der Anordnung II5, im zweiten der Anordnung II7 entsprechen. Alle diese charakteristischen Flächenkomplexe werden jedoch eine Fläche (*R*) gemeinschaftlich haben, während die anderen Flächen derselben alle in einer Zone (*Z*) liegen.

Sind endlich 9 Flächen eines Krystalles nach II9 angeordnet, welcher Fall, wie wir gesehen, ebenfalls möglich ist, so haben die Elemente fünf Bedingungen zu erfüllen, die grösste Anzahl, der überhaupt die Elemente eines Krystalles genügen können. Diese Anordnung wird

nämlich schon stattfinden müssen, wenn wir bloss drei zu einander senkrechte Flächen U, V, W, Fig. 26 und zwei Flächen P, Q haben, welche etwa die Winkel VW und WU halbiren. Solche fünf Flächen bestimmen gerade erst die Elemente, und es sind daher Krystalle mit solchen Flächen wirklich möglich. In einer Zone wie $[UPW]$, in welcher drei Flächen unter Winkeln von 45° geneigt sind, muss dem §. 20 zufolge auch eine Fläche P' und aus dem gleichen Grunde in der Zone $[WQU]$ auch eine Fläche Q' möglich sein, so dass die Flächen P' und Q' die anderen Neigungswinkel VW und WU halbiren. In Folge dessen werden auch die Flächen R und R' mögliche Flächen sein müssen, die erstere liegt ja in den Zonen $[P'Q]$ und $[UV]$, die zweite in den Zonen $[PQ]$ und $[UV']$. Wir haben also bewiesen, dass, wenn Flächen wie P, Q, U, V, W an einem Krystalle möglich, auch Flächen möglich sind, deren Anordnung durch III9 gegeben ist. Nach diesen Flächen muss der Krystall dem vorhergehenden zufolge isoschematisch sein, derselbe wird aber alsdann nach jeder seiner Flächen isoschematisch sein, indem unter den Flächen III9 sich drei, etwa U, Q, R, angeben lassen, von denen keine auf der andern senkrecht steht.

Wir bemerken noch zum Schlusse, dass, wenn die charakteristischen Flächenkomplexe eines Krystalles dem Symbole I1 entsprechen sollen, ein solcher Krystall überhaupt nur nach einer einzigen Fläche P bei jeder Temperatur isoschematisch sein kann. Denn wäre er es auch noch nach einer zweiten Fläche Q, so müsste er auch bei jeder Temperatur isoschematisch sein nach einer möglichen Fläche R, welche senkrecht zu P und Q ist, und ebenso nach einer Fläche S, die senkrecht steht auf P und R. Die Flächen P, R, S stehen aber wechselweise auf einander senkrecht und entsprechen der Anordnung II3; die charakteristischen Flächenkomplexe des betrachteten Krystalles müssen daher wenigstens dem Symbole II3 entsprechen, was unserer Annahme zuwider läuft.

4. Kapitel.

Das zweite Hauptgesetz der Krystallographie.

§. 26. Die Holo- und Hemisymmetrie der Krystalle.

In einem früheren Paragraphe haben wir das Gesetz kennen gelernt, dem die Neigungen der Krystallflächen zu einander unterworfen sind, nämlich das Gesetz der Rationalität der Indices, demzufolge nur solche Flächen an einem Krystalle möglich sind, deren Indices sich wie rationale Zahlen verhalten, falls man die Durchschnitte dreier Flächen dieses Krystalles zu Axenrichtungen, die Abschnitte einer vierten Fläche aber zu Axenlängen wählt. Man ist so in den Stand gesetzt, alle Flächen anzugeben, welche möglicherweise an einem und demselben krystallisirten Körper auftreten können. Ob aber eine dieser möglichen Flächen wirklich auftritt oder nicht, ist jedoch nicht ganz zufällig, sondern insoferne bestimmt, als wir finden, dass gewisse Flächen immer zu gleicher Zeit auftreten. Man kann nämlich für viele Krystalle Ebenen S nachweisen, mit Bezug auf welche dieselben in physikalischer Hinsicht vollkommen symmetrisch sind, so zwar, dass Linien und Ebenen des Krystalles, die mit Bezug auf eine der Ebenen S isoschematisch sind, auch dieselben physikalischen Eigenschaften in qualitativer und quantitativer Hinsicht besitzen. Zu den physikalischen Eigenschaften einer möglichen Fläche ist aber auch der Umstand zu rechnen, ob diese Fläche wirklich an einem Krystalle auftritt oder nicht. Wir finden also, dass, wenn ein Krystall symmetrisch nach einer Ebene ist, zwei nach dieser Ebene isoschematische mögliche Flächen desselben auch immer gleichzeitig an diesem Krystalle auftreten.

Soll ein Krystall bei einer gewissen Temperatur symmetrisch sein nach einer Ebene, so muss er diess auch bei jeder anderen Temperatur

sein, wenigstens so lange keine chemischen Veränderungen an demselben wahrzunehmen sind. Die Abhängigkeit der physikalischen Konstanten eines Krystalles von der Temperatur ist ja auch nur eine der physikalischen Eigenschaften desselben; sind nun letztere bei einer bestimmten Temperatur symmetrisch nach einer Ebene, so werden sie diess auch bei jeder anderen Temperatur sein, da, wie gesagt, ihre Aenderungen ebenfalls symmetrisch mit Bezug auf jene Ebene vor sich gehen müssen.

Ist ein Krystall aber symmetrisch nach einer Ebene, so wird er auch isoschematisch nach dieser Ebene sein, da ja je zwei nach dieser Ebene isoschematische Ebenen des Krystalles dieselben physikalischen Eigenschaften haben müssen, und daher, wenn die eine derselben eine mögliche Fläche des Krystalles ist, diess auch für die andere stattfinden muss. Nach dem, was wir im §. 22 gesagt, ergibt sich hieraus unmittelbar, dass ein Krystall nur symmetrisch mit Bezug auf eine seiner möglichen Flächen sein kann.

Es ist aber auch leicht einzusehen, dass, wenn ein Krystall symmetrisch mit Bezug auf mehrere seiner Flächen sein soll, diese Flächen isoschematisch mit Bezug auf sich selbst sein müssen. Ist z. B. ein Krystall symmetrisch nach n Flächen S, so erfordert die Symmetrie, dass er auch symmetrisch sei nach $n-1$ Flächen T, die mit $n-1$ Flächen S isoschematisch zur $n$ten der letzteren Flächen sind; die Symmetrie bedingt ja, dass solche isoschematische Flächen gleiche physikalische Eigenschaften besitzen. Wir würden also $n-1$ neue Flächen haben, nach denen der Krystall ebenfalls symmetrisch sein müsste, soll diess aber nicht der Fall sein, so müssen die $n-1$ Flächen T dieselben sein, wie die $n-1$ Flächen S, welche letztere daher einen nach der $n$ten Fläche S isoschematischen Flächenkomplex bilden. Da aber dasselbe von jeder der Flächen S gelten muss, so können wir sagen, dass die Flächen, nach denen ein Krystall symmetrisch ist, isoschematisch mit Bezug auf sich selbst sein müssen.

Dem Vorhergehenden zufolge muss offenbar für einen Krystall die Anzahl der Flächen S, nach denen er symmetrisch ist, für jede Temperatur dieselbe sein. Da nun die Flächen S isoschematisch mit Bezug auf sich selbst sein sollen, und, wie wir im §. 25 gesehen haben, eine bestimmte Anzahl von Krystallflächen nur auf einerlei Weise so angeordnet sein kann, so folgt hieraus unmittelbar, dass die Anordnung der Flächen S und also auch ihre gegenseitigen Neigungen für jede Temperatur dieselben sein müssen. Wir können somit schliesslich folgenden Satz aussprechen:

„Ist ein Krystall bei einer bestimmten Temperatur symmetrisch nach *n* Ebenen, so ist er diess auch bei jeder anderen Temperatur. Jene *n* Ebenen aber sind mögliche Flächen des Krystalles, mit Bezug auf welche derselbe bei jeder Temperatur isoschematisch ist und welche Flächen isoschematisch mit Bezug auf sich selbst sind, in Folge dessen ihre gegenseitigen Neigungen sich nicht mit der Temperatur ändern."

Die Erfahrung hat nun gelehrt, dass, wenn wir gleichwerthige Ebenen eines Krystalles diejenigen nennen, welchen dieselben physikalischen Eigenschaften zukommen, mit Bezug darauf alle bisher untersuchten Krystalle sich in zwei Kategorien theilen lassen.

Erstens gibt es Krystalle, deren gleichwerthige Ebenen einen nach *n* Ebenen *S* isoschematischen einfachen Komplex bilden. Ein solcher Krystall ist also symmetrisch nach *n* Ebenen *S*; diess kann aber dem Vorhergehenden zufolge nur der Fall sein, wenn jene Ebenen *S* Flächen des Krystalles sind, mit Bezug auf welche er bei jeder Temperatur isoschematisch ist, und welche Flächen wiederum isoschematisch mit Bezug auf sich selbst sind. Die Erfahrung hat aber gezeigt, dass die Anzahl der Ebenen *S* immer der grössten Zahl von Flächen gleichkommt, die an dem betreffenden Krystalle isoschematisch mit Bezug auf sich selbst sein können, und dass also jene Ebenen *S* das bilden, was wir einen charakteristischen Flächenkomplex genannt haben. Wir nennen in diese Klasse gehörige Krystalle holosymmetrische oder symmetrische schlechtweg, und bezeichnen diesen ersten Fall als den der Holosymmetrie.

Zweitens aber im Falle der Hemisymmetrie haben wir Krystalle, deren gleichwerthige Ebenen nur die Hälfte eines einfachen Komplexes ausmachen, der nach den Flächen *S* einer der charakteristischen Flächenkomplexe des betreffenden Krystalles isoschematisch ist. Diese Hälfte von Ebenen des einfachen Komplexes muss aber so angeordnet sein, dass für je solche der Flächen *S*, die im Falle der Holosymmetrie gleichwerthig wären, entweder Symmetrie stattfindet, oder dieselbe auf gleiche Weise gestört ist. Hieraus folgt aber, dass solche der Flächen *S*, die im ersteren Falle gleichwerthig sind, diess auch im Falle der Hemisymmetrie sein müssen; würde letzteres nämlich nicht stattfinden, so wären ja die Symmetrieverhältnisse nach jenen Flächen nicht dieselben, was dem Vorhergehenden widerspricht.

Sind im Falle der Hemisymmetrie die Flächen *T* diejenigen der Flächen *S*, für welche Symmetrie stattfinden, so werden dem vorhergehenden Satze zufolge die Flächen *T* isoschematisch mit Bezug auf sich selbst sein und die gleichwerthigen Ebenen des hemisymmetrischen

Krystalles werden einen nach diesen Flächen T isoschematischen Komplex bilden müssen, wobei diess im Allgemeinen ein einfacher oder ein mehrzähliger sein kann. Nur wenn die Flächen T auch für sich ein charakteristischer Komplex eines Krystalles sein können, ist eine Hemisymmetrie unmöglich, bei der die gleichwerthigen Ebenen einen nach diesen Flächen T isoschematischen einfachen Komplex bilden würden. Denn nehmen wir an, diess wäre möglich, so müssten für einen solchen hemisymmetrischen Krystall A die Symmetrieverhältnisse offenbar genau dieselben sein, wie für einen nach den Flächen T holosymmetrischen Krystall B. Für letzteren Krystall würden also die Flächen T einen charakteristischen Flächenkomplex vorstellen, d. h. an dem Krystalle B können nicht mehr Flächen, als die Anzahl der Flächen T beträgt, vorhanden sein, mit Bezug auf welche der Krystall bei jeder Temperatur isoschematisch ist und die isoschematisch mit Bezug auf sich selbst sind. Das Gleiche müsste nun für den Krystall A stattfinden, welcher ja dieselben physikalischen Eigenschaften wie der Krystall B hat. Der Krystall A soll aber hemisymmetrisch nach den Flächen T sein, diess setzt andererseits voraus, dass die Flächen T nur einen Theil eines Komplexes bilden, mit Bezug auf welche der Krystall A bei jeder Temperatur isoschematisch ist, und die isoschematisch mit Bezug auf sich selbst sind. Der Widerspruch, in den wir auf diese Art gerathen, beweist also, dass unsere Annahme in der Wirklichkeit nicht stattfinden kann.

Vereinigen wir die zwei aufgezählten Fälle in einem Satze, so können wir der Erfahrung zufolge sagen:

„Ein Krystall ist in krystallographischer und physikalischer Hinsicht entweder holosymmetrisch oder hemisymmetrisch nach allen Flächen eines seiner charakteristischen Flächenkomplexe.“

Wir bezeichnen diesen Satz als das Gesetz der Symmetrie oder als das zweite Hauptgesetz der Krystallographie; es enthält in Verbindung mit dem ersten die ganze Lehre der Krystallographie, und seine Wichtigkeit ist hiedurch allsogleich einleuchtend.

Diejenigen Flächen, nach denen ein Krystall holo- oder hemisymmetrisch ist, nennen wir dessen Hauptschnitte; dieselben bilden einen der charakteristischen Flächenkomplexe des Krystalles. Ist letzterer holosymmetrisch, so sind alle Hauptschnitte desselben Ebenen der Symmetrie, im zweiten Falle sind es jedoch nur gewisse gleichwerthige Hauptschnitte.

Betrachten wir die Formen, in denen verschiedene Körper krystallisiren, so ist klar, dass diese Krystalle nach der in denselben herrschenden Symmetrie wesentliche Unterschiede nicht nur in ihren physikalischen Eigenschaften, sondern auch schon in ihrer äusseren Form zeigen werden. Man wird daher die Symmetrieverhältnisse der Krystalle mit Vortheil zur Klassifizirung derselben benützen können.

Da dem zweiten Hauptgesetze zufolge die Krystalle nur nach einem charakteristischen Flächenkomplexe symmetrisch oder hemisymmetrisch sein können, für die charakteristischen Flächenkomplexe der Krystalle aber nur die im §. 25 aufgezählten fünf Fälle möglich sind, so erhalten wir hiedurch mit Einschluss des Falles, wo gar keine Symmetrieebene an den Krystallen vorhanden ist, sogleich sechs Gruppen, in die sich alle möglichen Krystalle eintheilen lassen müssen. Man nennt diese Gruppen Krystallsysteme und bezeichnet sie mit folgenden Namen:

IlI9 tesserales,
II7 hexagonales,
II5 tetragonales,
II7 rhombisches,
I1 monoklinisches,
O0 triklinisches.

Die den Namen vorgesetzten Symbole geben die Anzahl und Vertheilung der Hauptschnitte für die Krystalle der betreffenden Systeme. In jedem dieser Systeme werden aber noch Krystalle vorkommen, die sehr verschiedene Symmetrieverhältnisse zeigen; dem zweiten Hauptgesetze zufolge können ja entweder alle Hauptschnitte Ebenen der Symmetrie sein, oder aber, es sind von den so bestimmten gleichwerthigen Ebenen nur die Hälfte wirklich gleichwerthig. Ist die eine Hälfte jener Ebenen unter sich gleichwerthig, so muss es natürlich auch die andere unter sich sein; die Anordnung dieser halben Anzahl von Ebenen muss aber eine solche sein, dass nach gleichwerthigen Hauptschnitten die Symmetrie entweder erhalten bleibt oder auf gleiche Weise gestört wird. Es lässt sich aber so, dass letzterer Bedingung genügt wird, die Wahl der halben Anzahl unter den ursprünglichen Richtungen auf mehrere Arten bewerkstelligen, welche jede eine neue, in ihren Symmetrieverhältnissen verschiedene Klasse von Krystallen gibt. Demzufolge kann also jedes der obigen Systeme in ein

holosymmetrisches,
protohemisymmetrisches,
deuterohemisymmetrisches u. s. f.

zerfallen. Die Betrachtung der einzelnen holosymmetrischen Systeme wird jedoch lehren, dass nur im hexagonalen Systeme zwei hemisymmetrische Unterabtheilungen möglich sind. Im tesseralen und tetragonalen Systeme haben wir je eine, in den übrigen Systemen gar keine hemisymmetrische Abtheilung.

§. 27. Gleichwerthige Richtungen. Charakteristische Axensysteme.

Wie aus dem vorhergehenden Paragraphe hervorgeht, können wir zur Kenntnis des Systems, dem ein Krystall angehört, durch Aufsuchung der charakteristischen Flächenkomplexe desselben gelangen. Diese Methode setzt freilich eigentlich voraus, dass wir den Krystall bei verschiedenen Temperaturen untersuchen; letzteres ist jedoch meist überflüssig. Ist nämlich ein Krystall isoschematisch nach einer Fläche, nach welcher er es nicht bei jeder Temperatur ist, so kann er nur für eine ganz bestimmte Temperatur nach dieser Fläche isoschematisch sein, und es ist natürlich im Allgemeinen unwahrscheinlich, dass diese Temperatur gerade mit der zusammenfällt, bei welcher wir den Krystall untersuchen. Aber selbst die strenge Befolgung dieser Methode gibt uns keinen Aufschluss über den holo- oder hemisymmetrischen Charakter eines Krystalles, noch auch im Allgemeinen über die eigentliche Lage der Hauptschnitte desselben. Ja es gibt Fälle, wo wir auch nicht einmal das System eines Krystalles nach dieser Methode ermitteln können, wenn nämlich an einem Krystalle zu wenig Flächen zur Bestimmung eines Axensystems vorhanden sind, mit Hilfe dessen wir die möglichen Flächen des Krystalles entwickeln könnten. Noch schlimmer ist es natürlich, wenn die Begrenzungsflächen eines Krystalles durch irgend welche Ursachen gänzlich fehlen.

Ein zweiter Weg zur Ermittlung des Systems eines Krystalles ist aber der, zu untersuchen, welches Anzahl und Vertheilung der gleichwerthigen Richtungen des Krystalles sind. Wir werden auf diesem Wege auch immer die Unterabtheilung des Systems finden, in welches ein Krystall gehört, die gleichwerthigen Richtungen eines Krystalles hängen ja von den Hauptschnitten und der nach denselben stattfindenden Holo- oder Hemisymmetrie ab. Zur Kenntnis der gleichwerthigen Richtungen eines Krystalls gelangen wir nun immer auf untrügliche Weise durch Untersuchung der physikalischen Eigenschaften des Krystalles, und es wird diess bei mangelhafter oder gänzlich fehlender äusserer Begrenzung des Krystalles auch der einzige mögliche Weg sein. Im entgegengesetzten Falle können wir jedoch schon aus den vorhandenen Flächen eines Krystalles auf dessen gleichwerthige Richtungen und

somit auf dessen holo- oder hemisymmetrisches System durch den Umstand schliessen, dass gleichwerthige Flächen auch gleichzeitig auftreten müssen. Nur haben wir uns in einem solchen Falle immer nachträglich die mathematische Ueberzeugung zu verschaffen, dass die als gleichwerthig vorausgesetzten Flächen eines Krystalles wirklich einen nach allen Flächen eines charakteristischen Komplexes dieses Krystalles isoschematischen Komplex oder wenigstens die Hälfte eines solchen bilden.

Es geht aber hieraus hervor, dass es auch für die Krystallographie von Wichtigkeit ist, Anzahl und Vertheilung der gleichwerthigen Richtungen jedes holo- oder hemisymmetrischen Systems im Allgemeinen und für spezielle Fälle jener Richtungen zu kennen. In den holosymmetrischen Systemen bilden die gleichwerthigen Richtungen einen einfachen Komplex, der nach jeder Hauptschnittsfläche des Krystalles isoschematisch ist. Zur Kenntnis der Lage der einzelnen Richtungen eines solchen einfachen Komplexes werden wir aber, nachdem, was wir im §. 17 von solchen Ebenen-Komplexen und im §. 22 über isoschematische Axensysteme gesagt haben, auf folgendem, analytischen Wege gelangen:

Man beziehe die zu einer beliebigen Richtung senkrechte Ebene auf ein nach der ersten Hauptschnittsfläche des Krystalles isoschematisches Axensystem. Die Indices dieser Ebene werden zwar im Allgemeinen keine rationalen Zahlen sein, allein nach §. 22 wird man doch immer entweder durch Vertauschung zweier derselben oder durch Aenderung eines ihrer Vorzeichen die Indices der mit dieser Ebene nach der ersten Hauptschnittsfläche isoschematische Ebenen erhalten: die Normale der letzteren Ebene wird aber die mit der ersten Richtung isoschematische Richtung sein. Man schlägt nun für eine zweite Hauptschnittsfläche dasselbe Verfahren ein, d. h. man bezieht zuerst die zu den schon bestimmten zwei Richtungen senkrechten Ebenen auf ein nach der zweiten Hauptschnittsfläche isoschematisches Axensystem und bestimmt dann je nach der Art dieses Axensystems durch Vertauschung oder Aenderung des Vorzeichens der Indices der ersteren Ebenen die Indices derjenigen Ebenen, die mit den früheren isoschematisch nach dem zweiten Hauptschnitte des Krystalles sind. Dasselbe Verfahren ist nun für einen dritten und für jeden folgenden Hauptschnitt auszuführen, wobei man jedoch bei dem letzten Hauptschnitte nicht stehen bleibt, sondern dann wieder auf den ersten übergeht, und das Verfahren überhaupt so lange fortsetzt, bis man keine neuen Ebenen mehr dadurch erhält. Die so bestimmten Ebenen, sowie die dazu senkrechten Rich-

tungen geben dann einen nach allen Hauptschnitten des Krystalles isoschematischen einfachen Komplex.

Diese Methode wird jedoch dadurch sehr vereinfacht, dass sich für Krystalle des monoklinischen, rhombischen, tetragonalen und tesseralen Systemes immer Axensysteme, und zwar krystallographische angeben lassen, die isoschematisch nach jedem der Hauptschnitte des betreffenden Krystalles sind. Legt man also ein solches Axensystem dem früheren Verfahren zu Grunde, so braucht man, wenn man auf einen weiteren Hauptschnitt übergeht, die schon bestimmten Ebenen auf kein neues Axensystem zu beziehen, da ja das alte auch isoschematisch nach dem neuen Hauptschnitte sein muss. In Folge dessen werden für ein solches Axensystem die Indices aller Ebenen, welche einen nach den Hauptschnitten isoschematischen, einfachen Komplex bilden, sich nur durch ihre Ordnung und durch ihre Vorzeichen unterscheiden können.

Für Krystalle des hexagonalen Systems lässt sich jedoch nur ein Axensystem auffinden, das isoschematisch nach bloss drei der Hauptschnitte ist, deren Anordnung dem Symbole I3 entspricht. Um also das frühere Verfahren auch in diesem Falle durchzuführen, scheint es, dass man drei Axensysteme braucht, von denen eines isoschematisch nach den drei Hauptschnitten *P*, *Q*, *R*, Fig. 25, ein zweites isoschematisch nach *P'*, *Q'*, *R'*, ein drittes endlich isoschematisch nach dem Hauptschnitte *T* ist. Allein das letzte Axensystem ist überflüssig, denn haben wir einmal einen Komplex von Ebenen bestimmt, der isoschematisch nach den Flächen *P*, *Q*, *R*, *P'*, *Q'*, *R'* ist, welche tautozonal, isoschematisch mit Bezug auf sich selbst und von gerader Anzahl sind, so muss dieser Komplex von Ebenen auch isoschematisch sein nach der zu diesen Flächen senkrechten Ebene, diess ist aber die Fläche *R*; wir brauchen daher für letztere Fläche gar nicht das angegebene Verfahren auszuführen, da wir ja gar keine neuen Ebenen dadurch bekommen können. Hieraus geht so viel hervor, dass, wenn man schliesslich alle Ebenen des einfachen Komplexes, der isoschematisch nach jedem Hauptschnitte ist, auf das erste Axensystem bezieht, die Indices dieser Ebenen nicht mehr als zweierlei verschiedene Werthe haben können.

Beginnen wir, um den Nachweis solcher Axensysteme für Krystalle der verschiedenen Systeme zu führen, mit dem monoklinischen Systeme, in welchem wir einen einzigen Hauptschnitt haben. Einen monoklinischen Krystall können wir daher nach §. 22 auf ein nach *V* isoschematisches Axensystem der ersten oder zweiten Art beziehen. Wir werden jedoch für solche Krystalle immer eines der ersten Art wählen, in welchem eine Axe senkrecht ist zu den beiden anderen, der

Fläche *V* parallelen Axen. Die zu den anderen senkrechte Axe wählen wir immer als *Y*Axe, der Hauptschnitt *V* wird daher parallel einer Fläche mit dem Symbole (010).

Im rhombischen Systeme haben wir drei zu einander senkrechte Hauptschnitte *U*, *V*, *W*, Fig. 23; wählen wir die Durchschnitte dieser Flächen zu Axenrichtungen, die Abschnitte einer beliebigen anderen Fläche des Krystalls aber zu Axenlängen, so erhalten wir offenbar ein Axensystem, das nach jeder der Flächen *U*, *V*, *W* ein isoschematisches Axensystem der ersten Art ist. In diesem Falle sind also alle drei Winkel des nach den Hauptschnitten isoschematischen Axensystems rechte, die Längen aber keiner Bedingung unterworfen. Die Hauptschnitte sind für ein solches Axensystem parallel den Flächen (100), (010), (001).

Für Krystalle des t e t r a g o n a l e n Systems, in welchem die Hauptschnitte durch Fig. 24 repräsentirt sind, wählen wir drei zu einander senkrechte, etwa *U*, *V*, *W* zu Axenebenen und bestimmen die Längen der in die Fläche *W* fallenden Axenrichtungen [*UW*] und [*VW*] durch einen der zwei anderen Hauptschnitte *R* oder *R'*; diese zwei Axen werden aber gleich lang, da sowohl *R* als *R'* gleich geneigt zu *U* und *V* sind. Bestimmen wir noch das Verhältnis dieser Axenlängen zur Länge der dritten Axe [*UV*] mit Hilfe irgend einer anderen Fläche des Krystalles, so erhalten wir schliesslich ein Axensystem, das mit Bezug auf *U*, *V*, *W* ein isoschematisches der ersten Art, mit Bezug auf *R* und *R'* aber eines der zweiten Art ist. In diesem Axensysteme sind die drei Axenwinkel rechte und zwei Längen einander gleich; die Symbole der Hauptschnitte werden für dasselbe ersichtlich

$$U\,(100),\quad V\,(010),\quad W\,(001),\quad R\,(110),\quad R'\,(\bar{1}10).$$

Die Krystalle des tesseralen Systems endlich, für welches wir neun durch Fig. 26 dargestellte Hauptschnitte haben, können wir auf ein Axensystem beziehen, das nach den drei Hexaederflächen ein isoschematisches der ersten Art, nach den sechs Dodekaederflächen aber eines der zweiten Art ist. Wir brauchen nur die Durchschnitte der Hexaederflächen *U*, *V*, *W* zu Axenrichtungen zu wählen, die Längen aber mit Hilfe von zwei Dodekaederflächen wie *P* und *Q* zu bestimmen. Die Axenwinkel sind alsdann lauter rechte und die Axenlängen ebenfalls einander gleich, da jede Dodekaederfläche gleich geneigt zu den zwei Hexaederflächen ist, in deren Zone sie liegt. Für dieses System ist also, wie wir schon wissen, das Axensystem durch die Hauptschnitte vollkommen bestimmt. Letztere sind für das angegebene Axensystem parallel von Flächen, deren Symbole

U (100), V (010), W (001)
P (011), Q (101), R (110)
P' (01$\bar{1}$), Q' (10$\bar{1}$), R' ($\bar{1}$10)

sind, wovon man sich leicht durch unmittelbare Anschauung oder durch die Zonenregel überzeugt, mit Hilfe deren man die Symbole aller Hauptschnitte findet, nachdem die für U, V, W, P, Q etwa festgestellt sind.

Für hexagonale Krystalle sind die Hauptschnitte durch die Fig. 25 gegeben; in diesem Falle können wir, wie schon gesagt, kein Axensystem auffinden, das nach jedem Hauptschnitte isoschematisch wäre, es gelingt nur, für drei Hauptschnitte ein solches Axensystem zu bestimmen. Um diess einzusehen, denken wir uns um den Krystall eine Kugel beschrieben, welche uns als Sphäre der Projektion (§. 6) dienen soll, und auf welcher die Punkte $P, P' \dots T$ die Pole der neun Hauptschnitte seien. Die sechs ersten dieser Pole werden in einem und demselben grössten Kreise liegen, welchen wir auch als den Durchschnitt der Kugel mit der Ebene der Zeichnung nehmen wollen, Fig. 27. Die Zone dieser sechs Pole wird daher in der Zeichnung ebenfalls ein Kreis sein, in welchem $RP' = P'Q = \dots = 30^0$; die Ebene dieses Kreises, also die Ebene der Zeichnung, wird aber offenbar der Hauptschnitt T sein, welcher auf den sechs ersten senkrecht steht. Die Normale dieses Hauptschnittes wird die Kugel in einem Punkte T treffen, welcher in der Zeichnung mit dem Mittelpunkte des Kreises $[PQ]$ zusammenfallen wird, sobald wir das Auge des Zeichners uns in diese Normale versetzt denken. Ist nun U der Durchschnittspunkt irgend einer Zone des Krystalles mit der Zone $[TP']$, so muss U der Pol einer möglichen Krystallfläche sein, da ja T und P' die Pole von Hauptschnitten, also auch die Pole möglicher Krystallflächen sind. Der Zonenkreis $[P'UT]$ wird aber bei der von uns angewendeten Projektion in eine gerade Linie übergehen. Die Ebene V nun, deren Pol in den beiden Zonenkreisen $[RU]$ und $[Q'T]$ liegt, wird ebenfalls eine mögliche Fläche des Krystalles sein, ebenso die Fläche W in den beiden Zonen $[QU]$ und $[R'T]$; die Zonenkreise $[Q'T]$ und $[R\,T]$ werden aber in der Zeichnung gleichfalls als gerade Linien erscheinen. Aus der Symmetrie dieser ganzen Figur ist aber ohne weiteren Beweis einleuchtend, dass die Pole U, V, W auf der Sphäre nicht nur unter sich, sondern auch vom Pole T gleich weit abstehen.

Dasselbe wird aber auch für die Punkte X, Y, Z gelten, in welchen die Sphäre von den Durchschnittslinien der Flächen U, V, W getroffen wird, wobei diese drei Kanten natürlich durch den Mittelpunkt der Sphäre

gehen müssen. Dem §. 6 zufolge bestehen nämlich für diese Punkte die Gleichungen

$$XV = XW = YW = YU = ZU = ZW = 90^0$$

welche offenbar nur erfüllt werden können, wenn X, Y, Z ebenfalls Punkte der Zonenkreise $[P'T]$, $[Q'T]$, $[R'T]$ sind, die vom Pole T gleich weit abstehen. Diese Punkte werden in dem angegebenen Zonenkreise auf derselben Seite des Poles T liegen müssen, wie die entsprechenden Pole U, V, W; denn es ist die Entfernung des Poles U z. B. von jedem Punkte des Zonenkreises $[Q'T]$, der auf der entgegengesetzten Seite von V liegt, kleiner als 90^0. Ferner sieht man, dass, wenn $UV > 90^0$ ist, X näher an T liegt als U, da ja in diesem Falle der Winkel $XV < UV$ sein muss, und ebenso umgekehrt. Es werden also entweder die Pole U, V, W oder aber die Punkte X, Y, Z welche natürlich auch unter einander gleich weit abstehen, näher an T liegen, je nachdem die Normalenwinkel der Flächen U, V, W kleiner oder grösser, oder aber die Kantenwinkel derselben grösser oder kleiner als 90^0 sind.

Die Linien OX, OY, OZ, wenn O den Mittelpunkt der Sphäre bedeutet, werden offenbar von der Fläche T in gleicher Entfernung vom Mittelpunkte geschnitten, da ja ihre Endpunkte X, Y, Z auf der Sphäre gleich weit vom Pole T abstehen; wählt man daher die Flächen U, V, W zu Axenebenen und bestimmt die Axenlängen durch eine zum Hauptschnitte T parallele Fläche, so werden wir ein Axensystem erhalten mit lauter gleichen Winkeln und Längen. Dieses Axensystem ist aber mit Bezug auf die Hauptschnitte P, Q, R ein isoschematisches der zweiten Art. Hievon überzeugt man sich leicht, wenn man bedenkt, dass die Zonenkreise $[P'T]$, $[Q'T]$, $[R'T]$ offenbar die Durchschnitte der Hauptschnitte P, Q, R mit der Sphäre sind; die Endpunkte der Normalen der durch jene Zonenkreise gelegten Ebenen sind ja offenbar die Punkte P, Q, R. Es ist klar, dass man auf ähnliche Weise ein zu den Hauptschnitten P', Q', R' isoschematisches Axensystem bestimmen könnte.

Was noch die Symbole der Hauptschnitte betrifft, so ist das Symbol von T offenbar (111). Sind alsdann M und N Flächen, deren Pole beziehungsweise in den Zonen $[UV]$, $[TW]$ und $[UW]$ und $[TV]$ liegen, so hat man für dieselbe offenbar die Symbole M (110) und N (101), indem die Symbole von U, V, W natürlich (100), (010), (001) sind. Aus der Symmetrie der ganzen Fig. 27 geht aber hervor, dass der Pol P in den beiden Zonenkreisen $[MN]$ und $[VW]$ liegt, und

dass daher die Fläche P das Symbol $(01\bar{1})$ haben muss. Die Symbole von Q und R ergeben sich aber auf gleiche Weise oder unmittelbar aus dem Symbole von P durch symmetrische Vertauschung der Indices. Die Symbole von P', Q', R' findet man schliesslich leicht mit Hilfe der Zonenkreise $[PQ]$ und $[UT]$, $[VT]$, $[WT]$; auch hier braucht man nur eines wirklich zu berechnen, indem die anderen sich schon durch Vertauschung der Indices ergeben. Man erhält hiedurch schliesslich

$$P\,(01\bar{1}),\quad Q\,(10\bar{1}),\quad R\,(1\bar{1}0),$$
$$P'(2\bar{1}\bar{1}),\quad Q'(\bar{1}2\bar{1}),\quad R'(11\bar{2}),$$
$$T\,(111).$$

Mit Hilfe dieser Axensysteme gelingt es, wie wir bei den einzelnen Systemen sehen werden, leicht, alle Ebenen zu bestimmen, die einen nach den betreffenden Hauptschnitten isoschematischen, einfachen Komplex bilden. Wir nennen diese verschiedenen Axensysteme im Allgemeinen charakteristische, im Einzelnen aber nach dem Namen des Krystallsystems, bei dem wir dieselben kennen gelernt haben. Man überzeugt sich leicht, dass die Nachweisung irgend eines dieser Axensysteme identisch ist mit der Auffindung einer entsprechenden Anzahl von Krystallflächen, die isoschematisch mit Bezug auf sich selbst sind.

Man sieht aber an den charakteristischen Axensystemen sehr deutlich die Anzahl der Bedingungen, denen die Elemente in den verschiedenen Krystallsystemen unterworfen sind. Bedeuten a, b, c die Längen, ξ, η, ζ aber die Winkel der charakteristischen Axensysteme, so hat man dem Vorhergehenden zufolge für das

tesserale System	$\xi = \eta = \zeta = 90^0,\ a = b = c,$
hexagonale „	$\xi = \eta = \zeta,\qquad a = b = c,$
tetragonale „	$\xi = \eta = \zeta = 90^0,\ a = b,$
rhombische „	$\xi = \eta = \zeta = 90^0,$
monoklinische „	$\xi = \zeta = 90^0.$

Die Krystallgestalten verschiedener Körper, die z. B. im tetragonalen Systeme krystallisiren, können sich daher dur durch die Länge der Axen von einander unterscheiden; im tesseralen Systeme werden sie dieselben Elemente haben müssen, dagegen wird im triklinischen Systeme jedes Stück der fünf Elemente im Allgemeinen verschiedene Grösse für zweierlei Krystalle haben müssen.

Ist man auf die angegebene Weise für irgend ein System zur Kenntnis der Anordnung gelangt, welche die gleichwerthigen Richtungen desselben im Allgemeinen haben müssen, so erhält man hieraus

auch leicht die Zahl und Anordnung der gleichwerthigen Richtungen in speziellen Fällen. Wird nämlich die ursprünglich beliebig angenommene Richtung, aus der man die anderen entwickelt hat, parallel einem oder mehreren der Hauptschnitte, so muss diess auch für die mit ersterer gleichwerthigen Richtungen gelten; die Folge wird sein, dass von den Richtungen, welche wir im allgemeinen Falle als gleichwerthige gefunden haben, gewisse zusammenfallen.

Wenn nun auch für die verschiedenen Systeme die Anzahl der gleichwerthigen Richtungen im Allgemeinen eine verschiedene ist, so kann doch in den eben betrachteten speziellen Fällen die Zahl und Anordnung dieser Richtungen für verschiedene Systeme dieselbe sein. Man würde daher, wenn man sich bei der Aufsuchung der gleichwerthigen Richtungen bloss auf spezielle Fälle beschränkte, leicht Täuschungen über das System der untersuchten Krystalle ausgesetzt sein.

Um endlich für die hemisymmetrischen Systeme zur Kenntnis der gleichwerthigen Richtungen zu gelangen, haben wir dem zweiten Hauptgesetze zufolge den für das betreffende holosymmetrische System bestimmten Komplex gleichwerthiger Richtungen in zwei Hälften so zu theilen, dass für Hauptschnitte, die im Falle der Holosymmetrie gleichwerthig sind, jetzt entweder die Symmetrie erhalten bleibt oder auf gleiche Weise gestört wird. Die Richtungen jedes dieser halben Komplexe sind dann als unter sich gleichwerthig zu betrachten, und geben uns die Symmetrieverhältnisse des betreffenden hemisymmetrischen Systems. Nur darf, wie wir im §. 26 gesehen, die Anordnung der Richtungen eines solchen halben Komplexes nicht der Anordnung der gleichwerthigen Richtungen in einem anderen holosymmetrischen Systeme entsprechen.

Auch für die hemisymmetrischen Systeme erhalten wir spezielle Fälle gleichwerthiger Richtungen dadurch, dass jede derselben einem oder mehreren der Hauptschnitte parallel wird.

§. 28. Formen, Holoeder, Hemieder. Kombinationen.

Für die Krystallographie sind, wie aus dem früher Gesagten hervorgeht, besonders jene gleichwerthigen Richtungen von Interesse, die senkrecht zu möglichen Fällen eines Krystalles sind. Es wird die Aufgabe der nächsten Kapitel sein, die Zahl und Anordnung der mit einer gegebenen Fläche gleichwerthigen Fläche in jedem Systeme und auch für spezielle Lagen der gegebenen Fläche festzustellen. Da bei diesen Untersuchungen die Rationalität der Indices der gegebenen Fläche gar nicht in Betracht kommt, so kann man die gefundenen Resultate

auch noch für Ebenen anwenden, die senkrecht zu beliebigen, aber gleichwerthigen Richtungen sind.

Wir nennen den Inbegriff aller mit einer möglichen Fläche gleichwerthigen Flächen kurz eine Form, und es ist ohne weiteres klar, dass die verschiedenen möglichen Formen in eben so viele Abtheilungen zerfallen, als es holo- und hemisymmetrische Systeme gibt. Allein die Formen eines und desselben Systems zerfallen wieder in zwei wesentlich von einander verschiedene Gruppen. Bei dem wirklichen Auftreten gleichwerthiger Flächen finden nämlich mit Bezug auf die zu diesen Flächen senkrechten gleichwerthigen Richtungen erfahrungsgemäss folgende zwei Fälle statt:

Erstens, es kommt zu jeder der gleichwerthigen Richtungen auf beiden Seiten des Krystalles eine senkrechte Fläche vor; in diesem Falle gibt es daher doppelt so viele gleichwerthige Flächen als gleichwerthige Richtungen, und unter den ersteren ist zu jeder Fläche eine parallele vorhanden. Wir nennen in diese Gruppe gehörige Formen holoedrische oder kurz Holoeder.

Zweitens, zu jeder der gleichwerthigen Richtungen kommt nur eine senkrechte Fläche vor; in diesem Falle wird also nur die Hälfte der Flächen des ersten Falles auftreten, indem von je zwei der parallelen Flächen eine ausbleibt. Dieses Ausbleiben ist aber nicht willkürlich, sondern die Anordnung der übrig bleibenden Flächen muss eine solche sein, dass sie für gleichwerthige Hauptschnitte eine ähnliche ist. Eine solche Anordnung wird sich aber im Allgemeinen auf verschiedene Weise bewerkstelligen lassen, demgemäss wir auch von protohemiedrischen, deuterohemiedrischen u. s. f. Formen sprechen. Diese Formen, die wir kurz Hemieder nennen, haben also keine parallelen Flächen, daher man dieselben auch als geneigtflächige Formen bezeichnen kann, im Gegensatze zu den holoedrischen, den parallelflächigen.

Um sich eine bessere Vorstellung von der gegenseitigen Lage der Flächen einer Form zu machen, denkt man sich die Flächen derselben von einem und demselben Punkte O, dem Axenmittelpunkte, gleich weit abstehend. Man sagt alsdann von den Flächen der Form, sie seien im Gleichgewichte. Die Flächen werden hiebei offenbar den Raum um den Punkt O einschliessen, ohne einspringende Winkel zu bilden, was ja auch der gewöhnliche Fall der Natur ist; dieselben werden sich aber auch gegenseitig so schneiden, dass die von ihnen gebildete Form von lauter kongruenten Polygonen begrenzt ist; was für die eine Fläche gilt, muss ja auch für die mit ihr gleichwerthigen gelten.

Da wir schon den allgemeinen Weg angegeben haben, auf welchem man für jedes System zur Kenntnis der Lage der mit einer gegebenen Fläche gleichwerthigen Flächen gelangt, so ist klar, dass jede Form durch die Indices einer einzigen ihrer Flächen gegeben ist, sobald man nur weiss, in welches holo- oder hemisymmetrische System dieselbe gehört, und ob sie eine holoedrische oder irgend eine hemiedrische Form ist. Wir können daher, das System als bekannt vorausgesetzt, eine Form dadurch bezeichnen, dass wir die Indices einer ihrer Flächen in Klammern, wie $\{\ \}$ einfassen und derselben

erstens einen der Buchstaben $\varkappa$, φ vorsetzen, je nachdem die Form eine proto- oder deuterohemisymmetrische ist,

zweitens aber einen der Buchstaben $\varkappa$, χ, γ... je nachdem dieselbe eine proto-, deutero- u. s. f. hemiedrische Form ist.

Das Symbol $\{hkl\}$ bedeutet somit einen holosymmetrischen Holoeder, das Symbol $\chi\varkappa\{hkl\}$ dagegen eine deuterohemiedrische, protohemisymmetrische Form u. s. w.

Unter den Flächen einer Form benützt man zur Bezeichnung der letzteren gewöhnlich diejenige Fläche, für welche möglichst viele der Indices positiv werden, und bleibt dann noch eine Wahl übrig, so nimmt man jene Fläche, deren Indices sich möglichst der Bedingung, dass der erste grösser als der zweite, dieser aber grösser als der dritte sei, nähern. Nur in dem hexagonalen Systeme werden wir ein anderes Prinzip bei Wahl der zur Bezeichnung der Form dienenden Fläche befolgen.

Dadurch, dass man in den vorstehenden Symbolen den Indices h, k, l verschiedene Werthe ertheilt, erhält man im Allgemeinen neue Formen, welche sich jedoch unter einander nur durch die Neigungen der Flächen, nicht aber durch deren Anzahl und Art der Anordnung unterscheiden. Wesentlich verschiedene Formen ergeben sich aber, sobald die Werthe von h, k, l solche sind, dass die Normale der Fläche (hkl) parallel einem oder mehreren der Hauptschnitte des betreffenden Krystallsystems wird. Wir erhalten auf diese Weise durch geeignete Spezialisirung der Indices aus der allgemeinen Form jedes Systemes neue spezielle Formen. Hiebei kann es geschehen, dass derlei hemiedrische Formen parallelflächig werden, sobald nämlich in Folge der Spezialisirung zwei Richtungen zusammenfallen, die vorher an ihren entgegengesetzten Enden senkrechte Flächen hatten. Solche spezielle Hemieder werden sich ersichtlich in nichts von den entsprechenden speziellen Holoedern unterscheiden, da ja für beiderlei Formen auch die physikalischen Eigenschaften denselben Gesetzen unterworfen sind.

In Betreff der speziellen Formen werden wir aber sehen, dass einzelne derselben, die den holo- und hemisymmetrischen Unterabtheilungen desselben Systems angehören, ja auch solche, die in ganz verschiedenen Systemen vorkommen können, vollkommen in ihren geometrischen Eigenschaften übereinstimmen. Durch die blosse Untersuchung der krystallographischen Verhältnisse solcher spezieller Formen können wir daher nicht mehr die Frage beantworten, in welches System ein in diesen Formen auftretender Krystall gehört, sondern wir sind, wenn keine anderen Flächen an dem Krystalle auftreten, wieder auf die Betrachtung der physikalischen Eigenschaften angewiesen.

Die Krystalle, wie sie in der Natur vorkommen, sind nun entweder bloss von gleichwerthigen Flächen begrenzt, also das, was wir eine Form genannt haben, oder aber es kommen an ihnen auch ungleichwerthige Flächen vor. Dann müssen sich die Flächen des Krystalles offenbar in Gruppen abtheilen lassen, die lauter gleichwerthige Flächen enthalten, und deren jede dieselbe Symmetrie zeigt, wie der ganze Krystall. Die Flächen der einzelnen Gruppen müssen aber Formen ein und desselben holo- oder hemisymmetrischen Systems sein. Man nennt solche Krystalle Kombinationen, und zwar zwei-, drei-, vierzählige u. s. f., je nachdem die Flächen des betreffenden Krystalles von zwei, drei, vier u. s. f. Formen gebildet werden. Die Bestimmung der Formen, aus denen eine Kombination besteht, heisst dieselbe auflösen.

Bei der Zeichnung von Kombinationen lässt man gewöhnlich ebenfalls die Flächen, die zu einer und derselben Form gehören, gleich weit vom Axenmittelpunkte entfernt sein. Auch in diesem Falle, den man wie früher als den des Gleichgewichtes bezeichnet, müssen die Flächen, die zu derselben Form gehören, kongruente Umrisse haben. Je nachdem nun die Flächen der einen oder der anderen Form näher dem Mittelpunkte sind und in Folge dessen eine grössere Ausdehnung haben, erhält die Kombination ein sehr verschiedenes Aussehen, das man den Habitus derselben nennen kann. Die Formen, aus denen eine Kombination gebildet wird, gibt man gewöhnlich in der Ordnung an, in der die Ausdehnung ihrer Flächen abnimmt, die vorherrschenden Formen also zuerst.

Hier ist noch zu bemerken, dass unter den Formen der verschiedenen Systeme es solche gibt, die nur von tautozonalen oder gar nur von zwei parallelen Flächen begrenzt werden; solche Formen, deren Flächen kein endliches Stück des Raumes begrenzen, heissen offene, im Gegensatze zu den anderen, den geschlossenen Formen. Eine

offene Form kann natürlich nicht allein an einem Krystalle vorkommen, da ja derselbe eine unendliche Ausdehnung haben müsste. Der betreffende Krystall muss also eine Kombination sein.

Natürlicher Weise können an einem und demselben Krystalle Holoeder und Hemieder zugleich vorkommen, wenn dieselben nur der gleichen Unterabtheilung eines Systemes angehören. Wir wissen ja, dass solche Formen, obwohl verschieden, durch die Anzahl ihrer Flächen doch dieselbe Zahl und Anordnung ihrer gleichwerthigen Richtungen, kurz dieselben Symmetrieverhältnisse haben.

Ganz unmöglich ist es jedoch, dass Formen verschiedener Systeme miteinander kombinirt vorkommen; es ist diess schon eine krystallographische Unmöglichkeit, da ja solchen Formen verschiedene charakteristische Flächenkomplexe entsprechen würden. Dasselbe geht natürlich auch aus der Betrachtung der gleichwerthigen Richtungen hervor, deren Anordnung nicht zwei Gesetzen auf einmal genügen kann.

Auch Formen, die verschiedenen Unterabtheilungen eines und desselben Systemes angehören, können nicht miteinander in Kombination treten, obwohl es in diesem Falle keine krystallographische Unmöglichkeit ist. Allein in Betreff der durch die Flächennormalen der Formen gegebenen gleichwerthigen Richtungen gilt ebenfalls die zuvor gemachte Bemerkung.

§. 29. Antihemiedrie, Hemimorphie, Meroedrie.

Im Allgemeinen besteht eine hemisymmetrische Form A aus der Hälfte der Flächen einer entsprechenden holosymmetrischen Form F; es ist klar, dass auch die andere Hälfte der Flächen der Form F eine Form B bilden werden von demselben hemisymmetrischen Charakter wie A. Es können also A und B zu gleicher Zeit an einem hemisymmetrischen Krystalle vorkommen, und es kann sogar bisweilen zweifelhaft werden, ob die Flächen A und B zwei hemisymmetrischen Formen oder einer einzigen holosymmetrischen angehören. Gewöhnlich jedoch sind die Flächen zweier Formen wie A und B an einem und demselben Krystalle ungleich entwickelt, sowie auch oft schon die äussere Beschaffenheit dieser Flächen eine verschiedene ist. Die Untersuchung der weiteren physikalischen Eigenschaften würde natürlich auch in diesem Falle jeden Zweifel beheben. Zwei hemisymmetrische Formen wie A und B, deren Flächen eine holosymmetrische Form desselben Systems bilden, nennen wir k o r r e l a t e Formen.

Etwas Aehnliches gilt auch für die holoedrischen Formen jedes Systems, die ja in zwei hemiedrische zerfallen. Die Flächen der letz-

teren Formen können nun wohl verschieden weit vom Mittelpunkte des Krystalles abstehen, ihre physikalische Beschaffenheit muss jedoch natürlich dieselbe sein, da die Flächen der einen Form parallel zu den Flächen der anderen sind. Auch solche zwei Hemieder, deren Flächen zusammen einen Holoeder desselben Systems bilden, nennen wir **korrelat.**

Trotzdem finden sich in der Natur einige Beispiele von Krystallen, bei denen Flächen korrelater Hemieder nicht dieselben physikalischen Eigenschaften besitzen. Solche Krystalle scheinen also (wenigstens für gewisse ihrer Richtungen) eine Ausnahme von der allgemeinen Regel zu machen, derzufolge die physikalischen Eigenschaften für jede Linie eines Krystalles nach beiden Richtungen dieser Linie dieselben sind; in dem erwähnten Falle haben ja zwei Flächen, die senkrecht zu einer und derselben Linie sind, nicht dieselben Eigenschaften. Wir können diese Erscheinung etwa mit dem Namen **Antihemiedrie** belegen; Krystalle, an welchen dieselbe wahrgenommen wird, sind darum in physikalischer Hinsicht interessant, weil sie das Phänomen der **Pyroelektrizität** zeigen. Ein Beispiel hiefür bietet der holotesserale Boracit ($3MgO$, $4BO_3$), an welchem von den Flächen des Oktaeders, die dem einen hemiedrischen Tetraeder entsprechenden immer rauh, die dem anderen Tetraeder entsprechenden Flächen aber glänzend sind. Bei einer Temperaturerhöhung werden nun die letzteren Flächen negativ elektrisch, während die ersteren parallelen Flächen positiv elektrisch werden.

Ja, die eben beschriebene Erscheinung der Antihemiedrie scheint sogar für die hemiedrischen hemisymmetrischen Krystalle die Regel zu sein. Freilich wurde bis jetzt erst eine äusserst geringe Anzahl hieher gehöriger Körper in der Natur beobachtet, welche vielleicht nicht berechtigt, auf ein allgemeines Gesetz zu schliessen. Die Krystalle dieser wenigen Körper verhalten sich aber, soferne sie durchsichtig sind, auch mit Beziehung auf ihre optischen Eigenschaften höchst merkwürdig. Dieselben zeigen nämlich das Phänomen der **Zirkularpolarisation des Lichtes.** Die wichtigsten dieser Substanzen sind das chlorsaure Natron, welches im hemitesseralen Systeme krystallisirt, und der Quarz, der einem hemihexagonalen Systeme angehört.

Das Auftreten der Zirkularpolarisation in den erwähnten Krystallen scheint mit dem Umstande verknüpft zu sein, dass für die hemisymmetrischen Systeme von je zwei korrelaten Hemiedern, welche also zusammen eine holoedrische Form dieses Systems geben, der eine das Spiegelbild des anderen ist, dieselben sich also etwa so zu einander

verhalten, wie der rechte Handschuh zum linken desselben Paares. Zwei solche Handschuhe können durch keine Drehung in einander übergehen, werden aber identisch, sobald man an einem derselben die innere Seite herauskehrt. Man bezeichnet diesen „durch keine Stellungsänderung auszugleichenden Gegensatz der übrigens ganz identischen Formbildung" nach Naumann als Enantiomorphie. Korrelate hemisymmetrische Hemieder sind also, wie wir sehen werden, immer enantiomorph.

Untersuchen wir in dieser Hinsicht korrelate Hemieder der holosymmetrischen Formen, so finden wir, dass dieselben nach der Art der Hemiedrie entweder solche sind, die sich bloss durch ihre Stellung unterscheiden, und also durch Drehung der einen Form um eine bestimmte Axe zur Deckung gebracht werden können, oder aber wir finden, dass die korrelaten Hemieder wie im vorhergehenden Falle enantiomorph sind. Die letzte Art der Hemiedrie ist jedoch für die holosymmetrischen Formen noch nicht mit Sicherheit in der Natur nachgewiesen, und die Frage daher noch eine offene: ob an holosymmetrischen Krystallen auch enantiomorphe Hemiedrie möglich ist, und ob im Bejahungsfalle solche Krystalle das Licht ebenfalls zirkularpolarisiren.

In diese Klasse von Erscheinungen dürfte auch die Hemimorphie der Krystallformen gehören. In den Systemen nämlich, in welchen ein Hauptschnitt vorkommt, der mit keinem der anderen gleichwerthig ist, sind Krystalle in der Natur beobachtet worden, bei denen die Anordnung der Flächen gewisser Formen eine solche ist, dass die Flächen derselben sämmtlich nur auf einer Seite jenes Hauptschnittes liegen. Solche hemimorphe Formen sind also wie die hemiedrischen nur von der halben Anzahl von Flächen der entsprechenden Holoeder begrenzt, indem zu jeder einzelnen eines Komplexes gleichwerthigen Richtungen nur eine senkrechte Fläche vorhanden ist. Theilt man die entsprechenden, im Gleichgewichte befindlichen Holoeder durch jenen Hauptschnitt in zwei Theile, so stellt jeder dieser Theile offenbar eine hemimorphe Form vor. Sind in einem Systeme mehrere solcher Hauptschnitte vorhanden, die mit keinem anderen gleichwerthig sind, so gibt es mit Beziehung auf diese Hauptschnitte in dem betrachteten Systeme proto-, deuterohemimorphe Formen u. s. f. Wir bezeichnen dieselben wieder durch eine ihrer Flächen und durch Vorsetzung eines der Buchstaben ϱ, σ, τ. Krystalle, an denen solche hemimorphe Formen, welche ersichtlich offene sind, vorkommen, sind nun wie die früher besprochenen pyroelektrisch, indem bei Temperaturänderungen die zu beiden Seiten jenes Hauptschnittes liegenden Hälften der Krystalle

ungleichnamig elektrisch werden. Es liegt natürlich die Vermuthung nahe, dass solche Krystalle wenigstens für Linien senkrecht zu den Flächen ihrer hemimorphen Formen verschiedene physikalische Eigenschaften nach den beiden Richtungen dieser Linien haben. Beispiele hemimorpher Krystalle sind: Turmalin im hexagonalen, Rohrzucker im monoklinischen Systeme.

Schliesslich ist noch zu erwähnen, dass, abgesehen von den Fällen, in welchen von den Flächen der Formen beim wirklichen Auftreten in der Natur beliebig einzelne oder mehrere ganz fehlen, dieses Ausbleiben der Flächen bisweilen so stattfindet, dass die übrig bleibenden Flächen Formen eines anderen Systemes entsprechen. Man bezeichnet diess als Meroedrie der Krystallformen. Dieses gewissermassen regelmässige Ausbleiben der Flächen ist jedoch, sowie das ganz unregelmässige von keinem Einflusse auf die physikalischen Eigenschaften der Krystalle. Beispiele der Meroedrie bietet z. B. der tesserale Salmiak (NH_4 Cl), den man bisweilen in Formen erhält, die der Symmetrie des tetragonalen Systems entsprechen. Den korrespondirenden, ebenfalls tesseralen Bromsalmiak (NH_4 Br) hatte der Verfasser in Prof. Hofmann's Laboratorium zu London Gelegenheit, in schönen, scheinbar rhombischen Pyramiden zu beobachten. Auch in scheinbar hexagonalen Formen können tesserale Krystalle auftreten, wie diess der bei Tschoppan vorkommende Flussspath zeigt. Das rhombische rothe Blutlaugensalz ($K_3Fe_2Cy_6$) erhält durch Ausbleiben gewisser Flächen meist einen monoklinischen Habitus, welcher Umstand lange zu Täuschungen über das richtige System dieser Substanz Anlass gab.

§. 30. Zwillinge.

Ausser den unregelmässigen Verwachsungen, in welchen die einzelnen Krystalle einer und derselben Substanz meist in der Natur auftreten, treffen wir aber bisweilen zwei gleichartige Krystalle so mit einander vereinigt, dass sie durch Drehung um eine gewisse Linie um 180° in parallele Stellung gebracht werden können, d. h. in eine Stellung, bei der jede mögliche Fläche des einen Individuums parallel der entsprechenden möglichen Fläche des zweiten Individuums ist. Eine solche Vereinigung zweier Krystalle nennt man einen Zwilling, jene Linie aber, um welche man beide Individuen drehen muss, damit sie in parallele Stellung gelangen, die Zwillingsaxe.

Solche Flächen der beiden Individuen eines Zwillings, welche nach der Drehung zusammenfallen oder doch wenigstens einander parallel werden, nennen wir korrespondirende Flächen. Indem wir die

beiden vereinigten Krystalle einzeln auf Axensysteme beziehen, die durch korrespondirende Flächen gebildet werden, müssen natürlich durch die Drehung um die Zwillingsaxe auch die beiden Axensysteme parallel werden, und müssen ganz zusammenfallen, sobald wir einen gemeinsamen Axenmittelpunkt für beide Individuen gewählt haben. Es ist auch klar, dass korrespondirende Flächen dieselben Symbole in beiden Individuen erhalten werden; ebenso müssen für eine zur Zwillingsaxe senkrechte Ebene dieselben Indices gelten, ob wir diese Ebene auf das Axensystem des einen oder des andern Individuums beziehen.

Die Erfahrung an wohl ausgebildeten Zwillingen hat nun gelehrt, dass die zur Zwillingsaxe senkrechte Ebene immer eine mögliche Fläche der einzelnen Individuen ist, und zwar meist eine Fläche mit ziemlich einfachen Indices. Wenn wir daher wissen wollen, ob zwei mit einander verwachsene Krystalle wirklich einen Zwilling bilden, so haben wir uns nicht nur zu überzeugen, dass die beiden Krystalle durch Drehung um irgend eine Linie um 180° in parallele Stellung gebracht werden können, sondern wir haben auch nachzusehen, ob die Indices der zu jener Linie senkrechten Ebene, bezogen auf das Axensystem eines der beiden Krystalle, sich wie drei rationale einfache Zahlen verhalten.

Wir nennen die zur Zwillingsaxe senkrechte Ebene im Einklange mit dem eben Gesagten die Zwillingsfläche. Da je zwei korrespondirende Flächen eines Zwillinges der Definition des letzteren zufolge parallel werden müssen, wenn man eine derselben um die Normale der Zwillingsfläche um 180° dreht, so müssen je zwei solche Flächen nach §. 17 isoschematisch sein mit Bezug auf die Zwillingsfläche, d. h. sie müssen mit der Zwillingsfläche in einer Zone liegen und gleich geneigt zu ihr sein. Es gibt uns diess ein Mittel in die Hand, die Zwillingsfläche zweier zu einem Zwillinge vereinigter Krystalle zu bestimmen. Wir haben nämlich bloss zwei korrespondirende Flächen aufzusuchen, und die zwei Winkel, welche dieselben bilden, durch zwei Ebenen zu halbiren, es bleibt dann nur noch übrig zu entscheiden, welche dieser zwei Ebenen die Zwillingsfläche ist.

Kennt man zwei Paare korrespondirender Flächen, etwa P, p und Q, q, so ist die Fläche, welche in den beiden Zonen Pp und Qq dieser Flächenpaare liegt, offenbar die Zwillingsfläche, welche sich ersichtlich durch diese Methode am leichtesten bestimmt.

Die Vereinigung zweier Krystalle zu einem Zwillinge kann zweierlei Art sein. Dieselbe ist nämlich erstens in den sogenannten Juxtapositions-Zwillingen eine solche, dass der Zwilling durch einen senkrecht zur Zwillingsaxe geführten Schnitt in seine beiden Individuen

zerlegt werden kann; die letzteren stossen also in diesem Falle in einer Ebene zusammen, welche nichts anderes als die Zwillingsfläche ist. Hiebei sind aber die beiden Krystalle selten im Gleichgewichte, sondern es ist meist nur diejenige Hälfte derselben ausgebildet, welche auf der entgegengesetzten Seite jener Trennungsebene liegt. In den Kanten der letzteren Ebene treffen meist korrespondirende Flächen zusammen.

Zweitens aber können sich die beiden Individuen eines Zwillings ganz oder zum Theil wechselweise durchdringen, natürlich immer in der durch die Zwillingsbildung geforderten Stellung. Aber auch in diesen Penetrations-Zwillingen sind die Kanten, in denen die zwei Individuen aneinanderstossen, häufig die Durchschnitte korrespondirender Flächen, welche jedoch im Allgemeinen sowohl ausspringende als einspringende Winkel bilden. Das Auftreten der letzteren Art von Winkel muss auch immer aufmerksam auf eine möglicherweise vorhandene Zwillingsbildung machen.

Stossen in einem Zwillinge keine Flächen aneinander, die einspringende Winkel bilden, so geschieht es sowohl in dem zuerst betrachteten Falle, besonders aber bei den Penetrations-Zwillingen, dass der Zwilling scheinbar das Ansehen eines einfachen Krystalles erhält. Abgesehen von den krystallographischen Verhältnissen lassen aber auch die physikalischen Eigenschaften an einem solchen Zwillinge die verschiedenen Partien nachweisen, welche theils dem einen, theils dem anderen Individuum angehören. Besonders bei doppeltbrechenden Krystallen gelingt diess leicht mit Hilfe des polarisirten Lichtes.

Sind beide Individuen eines Zwillings von entsprechenden Flächen gebildet, was gewöhnlich der Fall der Natur ist, so wird dem Vorhergehenden zufolge offenbar auch der ganze Zwilling isoschematisch nach der Zwillingsfläche sein. Sind die einzelnen der zu einem Zwillinge verbundenen Krystalle A und B schon isoschematisch nach der Zwillingsfläche P, so ist jede Fläche des einen Individuums in ungeänderter Lage auch eine mögliche Fläche des anderen Individuums, wie leicht einzusehen. Denn in Folge der Zwillingsbildung muss zu jeder Fläche f des Krystalles B eine Fläche F des Individuums A möglich sein, die mit ihr nach der Zwillingsfläche P isoschematisch ist. Ist nun der Krystall A selbst isoschematisch mit Bezug auf P und ist F eine mögliche Fläche desselben, so muss der Definition isoschematischer Krystalle zufolge offenbar auch f eine mögliche Fläche des Krystalles A sein.

Der eben besprochene Umstand tritt natürlich immer ein, wenn die Zwillingsfläche P parallel einem der Hauptschnitte der zwei Indi-

viduen ist, indem ja jeder Krystall nach seinen Hauptschnitten isoschematisch sein muss. Da man aber für jeden Krystall, wie wir gesehen, ein Axensystem bestimmen kann, das isoschematisch ist nach irgend einem seiner Hauptschnitte, so kann man auch in dem gegenwärtigen Falle jedes Individuum des Zwillings auf ein nach P isoschematisches Axensystem beziehen. Eine Eigenschaft eines solchen Axensystems ist, dass es nicht geändert wird, wenn man dasselbe um die Normale zu P um 180° herum dreht. Solche Axensysteme der beiden Individuen dürfen sich also einerseits nicht ändern, wenn man einen der Krystalle um die Zwillingsaxe um 180° dreht, andererseits aber müssen sie durch diese Drehung in Folge der Zwillingsbildung einander parallel werden, woraus hervorgeht, dass diese Axensysteme schon vor der Drehung einander parallel sein müssen. Wir sehen also, dass bei einem solchen Zwillinge die beiden Individuen sich auf parallele Axensysteme beziehen lassen, und dass daher auch alle möglichen Flächen derselben paarweise einander parallel sein werden. Bei zwei so vereinigten Krystallen bleibt es also zweifelhaft, ob sie als wahre Zwillinge oder bloss als parallele Aneinanderlagerung zweier Individuen aufzufassen sind.

Hieher gehören auch die in der Natur häufig auftretenden, durch korrelate Formen gebildeten Penetrations-Zwillinge; die beiden Formen durchdringen sich hiebei wechselweise in richtiger Stellung gegeneinander. Auch hier hat man die Wahl, diess nur als ein eigenthümliches Auftreten der Flächen der vollflächigen Form zu betrachten.

Zwillinge einer und derselben Substanz, deren Zwillingsflächen solchen Flächen entsprechen, die im Falle der Holosymmetrie gleichwerthig sind, nennen wir gebildet nach demselben Zwillingsgesetze. Sind die Krystalle selbst holosymmetrisch, so besteht ersichtlich kein Unterschied zwischen Zwillingen, die nach demselben Gesetze gebildet sind. Ein solcher Unterschied ist nur bei hemisymmetrischen Krystallen denkbar, wenn die Zwillingsbildung nach Flächen stattfindet, die nur im Falle der Holosymmetrie gleichwerthig sind.

Wir finden, dass die Krystalle einer und derselben Substanzen sich nur nach wenigen Zwillingsgesetzen zu Zwillingen vereinigen. So werden bei den verschiedenen Substanzen gewöhnlich nur 1, 2 oder 3 wesentlich verschiedene Flächen angetroffen, die als Zwillingsflächen auftreten.

Es kommen in der Natur auch Drillinge vor, drei Krystalle, A, B, C, können nämlich so miteinander vereinigt sein, dass A mit B und B mit C einen Zwilling bildet. An dem Krystalle B werden daher zwei Flächen, P und Q, möglich sein müssen, so dass, wenn man das

Individuum A um die Normale zu P, das Individuum B aber um die Normale zu Q um 180° dreht, die drei Krystalle A, B, C sich in paralleler Stellung befinden; hiebei kann der Zwilling AB im Allgemeinen nach demselben Gesetze gebildet sein wie der Zwilling BC oder nicht. Im ersteren Falle müssen also P und Q Flächen sein, die, wenn B holosymmetrisch wäre, isoschematisch sind.

Ja es gibt auch Vierlinge, Fünflinge u. s. f. in der Natur; hiebei sind jedoch die einzelnen Individuen fast immer nach demselben Zwillingsgesetze aneinander gereiht, so dass also je zwei Zwillingsflächen, die demselben Individuum angehören, für den Fall der Holosymmetrie gleichwerthige Flächen desselben sind.

§. 31. Symmetrieverhältnisse der Axen der Krystalle.

Unter den verschiedenen Richtungen eines Krystalles werden vorzüglich jene für die Symmetrieverhältnisse der Krystalle von Wichtigkeit sein, die parallel zu einem oder mehreren der Hauptschnitte desselben sind. Um solche Richtungen herum wird eine gewisse Symmetrie stattfinden müssen, und zwar von eben so hoher Ordnung als Hauptschnitte dieser Richtung parallel sind. Die Auffindung solcher Richtungen an einem Krystalle wird uns daher wesentlich in dem Bestreben unterstützen, die Symmetrieverhältnisse eines Krystalles zu erkennen.

Wenn wir nun die an Krystallen möglichen Vertheilungen der Hauptschnitte ins Auge fassen, so überzeugen wir uns leicht, dass eine Richtung nur parallel einem, oder aber parallel zu zwei, drei, vier und sechs Hauptschnitten sein kann, die sich beziehungsweise unter Winkeln von 90, 60, 45 und 30° schneiden. Demgemäss sprechen wir, indem wir auch noch solche Richtungen, die gar keinem Hauptschnitte parallel sind, berücksichtigen, von triklinischen, monoklinischen, rhombischen, trigonalen, tetragonalen und hexagonalen Axen, wobei eben das Wort Axe nicht im krystallographischen, sondern bloss im geometrischen Sinne aufzufassen ist und nur die Richtung irgend einer Linie bedeutet, welche wir uns jedoch gewöhnlich durch den Mittelpunkt der Krystallgestalt gezogen denken.

Soll nun für die verschiedenen Axen die um dieselben herum stattfindende Symmetrie bestimmt werden, so reduzirt sich diese Aufgabe offenbar darauf, die Anordnung gleichwerthiger Richtungen zu finden, die bloss durch tautozonale Hauptschnitte bedingt sind.

Diese Aufgabe haben wir aber wenigstens für den Fall der Holosymmetrie schon im §. 21 gelöst, wo wir gezeigt haben, wie man für eine beliebige Anzahl von tautozonalen Ebenen, die isoschematisch mit

Bezug auf sich selbst sind, die einzelnen Richtungen eines nach diesen Ebenen isoschematischen einfachen Komplexes finden kann. Durch Spezialisirung jener allgemeinen Untersuchung erhalten wir die nachfolgenden Resultate, von deren Richtigkeit man sich übrigens auch leicht durch direkte geometrische Anschauung überzeugen kann.

In den Fig. 28—32 bedeuten nun die Punkte A immer die Endpunkte der verschiedenen Axen auf der Sphäre der Projektion, wobei die Axen senkrecht zur Ebene der Zeichnung, das Zentrum der Sphäre aber in derselben gedacht werden. Die durch den Punkt A gezogenen Linien geben dann die Durchschnitte der Sphäre mit den Hauptschnitten, in welchen die betreffende Axe liegt; die mit Ziffern bezeichneten Punkte aber geben endlich die Endpunkte von Richtungen eines Komplexes, der isoschematisch nach allen im Punkte A sich kreuzenden Hauptschnitten ist. Findet nach letzteren Flächen Holosymmetrie statt, so sind jedesmal alle bezifferten Punkte wirklich gleichwerthige, d. h. sie sind die Endpunkte gleichwerthiger Richtungen; für den Fall der Hemisymmetrie aber ist es nur je eine Hälfte dieser Punkte. Wie wir schon im §. 21 gezeigt, müssen diese Punkte alle gleich weit abstehen vom Punkte A, und die Winkel zwischen je zwei benachbarten Punkten können nur zweierlei Werthe haben, die in aufeinander folgenden Winkeln immer miteinander abwechseln.

Wir haben also:

1. Triklinische Axen, welche gar keinem Hauptschnitte parallel sind; um solche herum findet natürlich auch gar keine Symmetrie statt.

2. Monoklinische Axen, welche parallel einem einzigen Hauptschnitte eines Krystalles, Fig. 28, sind. Die im Falle der Holosymmetrie gleichwerthige Punkte 1 und 2 sind es nicht mehr für den Fall der Hemisymmetrie; die hemisymmetrische monoklinische Axe wird eben eine triklinische.

3. Rhombische Axen, d. h. solche Richtungen eines Krystalles, die parallel zu zwei auf einander senkrechten Hauptschnitten desselben gehen. Die Symmetrie, welche um solche Axen herum stattfindet, ist durch die bezifferten Punkte der Fig. 29 gegeben, welche im Falle der Holosymmetrie gleichwerthig sind. Bei Hemisymmetrie sind entweder Punkte wie 1 und 3 oder wie 1 und 2 gleichwerthig. Im letzteren Falle geht die rhombische Axe offenbar in eine monoklinische über.

4. Tetragonale Axen, welche in vier unter Winkeln von 45° geneigten Hauptschnitten eines Krystalles liegen. Findet nach diesen

Flächen Holosymmetrie statt, so haben wir acht gleichwerthige Punkte, Fig. 30. Für den Fall der Hemisymmetrie kann jedoch die um eine solche Axe stattfindende Symmetrie nur gegeben sein entweder durch Pole wie 1, 3, 5, 7 oder wie 1, 2, 5, 6. Im letzteren Falle wird die tetragonale Axe wieder zur rhombischen.

5. Trigonale Axen, parallel zu bloss drei Hauptschnitten, die sich unter Winkeln von 60° gegenseitig schneiden; für holosymmetrische derartige Axen geben die Punkte 1—6 der Fig. 31 die um dieselben stattfindende Symmetrie an, für hemisymmetrische dagegen sind nur Punkte wie 1, 3, 5 gleichwerthige.

6. Hexagonale Axen endlich sind solche, die in sechs Hauptschnitten eines Krystalles liegen, welche Flächen tautozonal und unter Winkeln von 30° zu einander geneigt sein müssen. Findet nach diesen Flächen Holosymmetrie statt, so erhalten wir um hexagonale Axen herum 12 gleichwerthige Punkte, Fig. 32. Findet nach den Hauptschnitten jedoch nur Hemisymmetrie statt, so können nur entweder Punkte wie 1, 3, 5, 7, 9, 11 oder wie 1, 2, 5, 6, 9, 10 wirklich gleichwerthige sein. Im letzteren Falle gehen die hemisymmetrischen hexagonalen Axen in trigonale über.

Für die Krystallographie ist nun auch hier der Fall von besonderer Wichtigkeit, wo die gleichwerthigen Richtungen senkrecht zu möglichen Flächen sind. Es ist klar, dass im Falle der Holoedrie die um eine Axe auftretenden Flächen sich so in Komplexe abtheilen lassen müssen, dass die Anordnung jedes derselben durch die bezifferten Punkte der Fig. 28—32 repräsentirt wird. Im Falle der Hemiedrie werden jedoch nur die Hälfte dieser Punkte die Pole auftretender Flächen sein, gerade so, wie bei der Hemisymmetrie; allein zu den ausgebliebenen Richtungen werden auf der anderen Seite der betrachteten Axe Flächen auftreten müssen. Wollen wir also durch die blosse Anordnung der Flächen eines Krystalles über den Charakter einer Axe desselben entscheiden, so haben wir da, wo es sich um hemisymmetrische Axen handelt, immer beide Enden der Axe zu untersuchen und nachzusehen, ob die an einem Ende fehlenden Flächen nicht auf dem anderen auftreten, in welchem Falle die Axe nur eine hemiedrisch ausgebildete holosymmetrische Axe wäre.

Die 4 zuletzt aufgezählten Axen bezeichnet man auch mit dem Namen Hauptaxen; letztere müssen also parallel zu wenigstens zwei Hauptschnitten eines Krystalles sein, sind daher mögliche Kanten desselben, und also auch mögliche krystallographische Axenrichtungen. Der Hauptaxen eines Krystalles gibt es offenbar nur eine beschränkte

Anzahl, während die Zahl der triklinischen Axen für jeden Krystall und die der monoklinischen (mit Einschluss der hieher gehörigen hemisymmetrischen rhombischen Axen) wenigstens für solche Krystalle mit auch nur einem Hauptschnitte eine unbegrenzte ist; jede Richtung parallel einem Hauptschnitte ist ja eine monoklinische Axe.

Ist von irgend einer der vier Arten von Hauptaxen nur eine einzige in einem Krystallsysteme vorhanden, so nennt man dieselbe auch eine morphologische Axe; es tritt dann der Umstand ein, den wir an organischen Körpern beobachten, für welche eine gewisse Symmetrie fast durchgehends nur um eine einzige Richtung derselben stattfindet. Die Betrachtung der Fig. 23—26 zeigt leicht, dass das tetragonale und hexagonale System eine morphologische Axe besitzt, die parallel den tautozonalen Hauptschnitten ist, und im ersten Falle einen tetragonalen, im zweiten einen hexagonalen Charakter besitzt.

§. 32. Symmetrieverhältnisse der Flächen und Schnitte der Krystalle.

Wir haben schon wiederholt den Weg angedeutet, auf welchem man für ein bestimmtes Krystallsystem zur Kenntnis der gleichwerthigen Richtungen desselben gelangt. Es ist aber für das Studium der Krystallgestalten die Beantwortung auch der Frage von Interesse, welches die Vertheilung der gleichwerthigen Richtungen bloss auf einer bestimmten Ebene E eines Krystalles ist, wo wir unter Ebene eines Krystalles entweder eine Begrenzungsfläche desselben oder eine bebeliebige durch denselben geführte Schnittfläche verstehen. Wir können aber diese Frage nicht dadurch lösen, dass wir etwa alle mit einer beliebigen Richtung der gegebenen Ebene E gleichwerthigen Richtungen des Krystalles entwickeln und dann nachsehen, welche von diesen Richtungen ebenfalls jener Ebene parallel werden. Denn sind P und Q etwa zwei gleichwerthige Richtungen eines Krystalles, so werden wir in einer durch diese zwei Richtungen gelegten Ebene E allerdings zwei bestimmte gleichwerthige Richtungen haben, aus denen wir jedoch nicht auf die Symmetrieverhältnisse der Ebene E werden schliessen können. Aendern wir nämlich die eine Richtung P etwas, doch so, dass sie noch immer der Ebene E parallel bleibt, so wird die gleichwerthige Richtung Q im Allgemeinen nicht mehr parallel der Ebene E sein, die Richtungen P und Q repräsentiren daher nicht die der Ebene E angehörigen gleichwerthigen Richtungen. Diess ist vielmehr nur dann der Fall, wenn die gleichwerthigen Richtungen P und Q durch Hauptschnitte bedingt sind, die senkrecht auf der Ebene stehen, denn als-

dann wird ersichtlich, wenn *P* in der Ebene *E* verschoben wird, auch *Q* noch immer parallel dieser Ebene bleiben müssen.

Die Symmetrieverhältnisse irgend einer Ebene eines Krystalles hängen also bloss ab von der Anzahl und der Vertheilung der auf dieser Ebene senkrecht stehenden Hauptschnitte des Krystalles. Die Normale dieser Ebene ist aber parallel zu allen Hauptschnitten, welche auf dieser Ebene senkrecht stehen, und es wird also auf jeder Ebene eines Krystalles dieselbe Art der Symmetrie stattfinden müssen, welche um die Normale dieser Ebene herum besteht, ein Satz, den wir auch schon von vornherein als richtig hätten annehmen können.

Wir werden also die Symmetrieverhältnisse von beliebigen Ebenen eines Krystalles leicht mit Hilfe der Entwicklungen des vorhergehenden Paragraphes angeben, wo wir die Art von Symmetrie kennen gelernt haben, welche um Richtungen stattfinden muss, die parallel einem oder mehreren der Hauptschnitte eines Krystalles sind.

Mit Bezug auf die Symmetrieverhältnisse der Ebenen eines Krystalles haben wir noch einen wichtigen Umstand zu erwähnen. Wir haben gesehen, dass, wenn ein Krystall nach einer seiner Richtungen gewisse physikalische Eigenschaften besitzt, er nach der gerade entgegengesetzten Richtung dieselben Eigenschaften aufweist. Eine Ausnahme hievon machen nur die seltenen im §. 29 erwähnten Fälle der Hemimorphie und der antisymmetrischen Hemiedrie. Bei den Ebenen der Krystalle ist nun diess der allgemeine Fall: finden für eine Richtung derselben gewisse physikalische Eigenschaften statt, so können wir nicht a priori schliessen, dass auch für die entgegengesetzte Richtung dieselben Eigenschaften gelten; es wird diess ersichtlich nur dann der Fall sein, wenn wirklich die direkte und die entgegengesetzte Richtung in Folge der Symmetrie der Ebene gleichwerthig sind.

Daher sind auch bei der Anwendung der Resultate des vorigen Paragraphes auf eine Ebene unter den gleichwerthigen Richtungen derselben solche, die von einem Punkte gerade entgegengesetzt gerichtet sind, nicht etwa als eine einzige aufzufassen, dieselben geben uns vielmehr eine Linie der untersuchten Ebene, parallel welcher nach beiden Richtungen dieselben physikalischen und krystallographischen Eigenschaften stattfinden.

Mit Bezug auf die letzteren Eigenschaften der Ebenen eines Krystalles ist es offenbar nur die Gestalt des Umrisses, also die Seiten und ebenen Winkel einer solchen Ebene, die hiebei in Betracht kommen kann. Die Seiten einer Ebene *E* werden sich von einander nicht nur durch ihre Lage, sondern auch durch ihre Grösse unterscheiden, d. h.

durch den Neigungswinkel jener Ebene E zu denjenigen Krystallflächen, deren Durchschnitte eben die betrachteten Seiten sind. Damit also zwei Seiten einer Ebene eines Krystalles gleichwerthig seien, genügt es nicht, dass sie senkrecht zu gleichwerthigen Richtungen dieser Ebene sind, sondern sie müssen die Durchschnitte von Krystallflächen sein, die mit Bezug auf die Normale der Ebene E gleichwerthig sind. Solche zwei Krystallflächen sind entweder gleich geneigt zu der Axe, nach welcher sie gleichwerthig sind, oder sie bilden mit dieser Axe gerade entgegengesetzte Winkel, wenn nämlich die zwei Flächen an den ungleichen Enden der gleichwerthigen Richtungen, auf denen sie senkrecht stehen, auftreten, wie diess im Falle der Hemiedrie stattfindet.

Demzufolge können wir also sagen, gleichwerthige Seiten einer Ebene stehen senkrecht auf gleichwerthigen Richtungen derselben und haben entweder dieselbe oder gerade entgegengesetzte Grösse; wenn wir nämlich die Neigungswinkel von der Ebene E aus nach einer und derselben Richtung rechnen. Die Umkehrung dieses Satzes gilt jedoch im Allgemeinen nicht.

Zu jeder Seite einer Ebene kann natürlich auch eine parallele vorkommen, da ja zu jeder Krystallfläche auch die parallele möglich ist, die Grössen zweier solcher parallelen Seiten werden sich offenbar zu 180° ergänzen. Sollen aber zwei parallele Seiten auch gleichwerthig sein, so werden sie senkrecht stehen müssen zu einer Linie der betrachteten Ebene, für welche Linie beide Richtungen gleichwerthig sind. Parallele ungleichwerthige Seiten können jedoch in einem speziellen Falle gleiche Grösse bekommen, natürlich ohne desshalb gleichwerthig zu werden. Es ist diess nämlich der Fall, in welchem die Ebene E senkrecht steht auf einer Krystallfläche und also auch auf der zu ihr parallelen möglichen Fläche; die Grösse der durch solche Flächen gebildeten Seiten ist dann gleich 90°.

Im Einklange mit den für die Axen eingeführten Bezeichnungen wählen wir auch mit Rücksicht auf die verschiedenen Symmetrieverhältnisse die Namen der verschiedenen Ebenen, so zwar, dass jede Ebene auf einer gleichnamigen Axe senkrecht steht. Die Symmetrie anf den verschiedenen Arten von Ebenen können wir uns aber wieder durch die Fig. 28 — 32 vorstellen; wir brauchen nur von dem Punkte A aus durch die bezifferten Punkte gerade Linien zu ziehen. Diese Linien werden uns die gleichwerthigen Richtungen der verschiedenen Ebenen repräsentiren, es sind ja eben die nach den verschiedenen Axen gleichwerthigen Richtungen für den Fall, dass die Endpunkte derselben alle in die äusseren Kreise der Figuren fallen.

Im Falle der Hemisymmetrie entsprechen natürlich auch nur die Hälfte dieser Linien wirklich gleichwerthigen Richtungen.

Die Seiten einer Ebene werden im Allgemeinen entweder bloss von gleichwerthigen, oder aber von zwei, drei u. s. f. verschiedenen Komplexen unter sich gleichwerthiger Seiten begrenzt, von welchen Komplexen natürlich jeder der Symmetrie der Ebene E gehorchen muss. Es ist auch leicht einzusehen, dass der Anzahl der verschiedenartigen Seiten, welche eine Ebene E eines Krystalles begrenzen, wenigstens ebenso viele einfache Gestalten an dem betreffenden Krystalle entsprechen müssen. Flächen verschiedener Formen können ja unmöglich nach der Normale zur Ebene E gleichwerthig sein.

Wir wollen nun die Gestalt des Umrisses der verschiedenen Arten von Ebenen näher kennen lernen. In den hieher gehörigen Figuren 33 bis 91 bedeuten von den durch die Punkte O gezogenen Linien, die mit Ziffern versehenen gleichwerthige Richtungen einer Ebene, dagegen die unbezifferten Linien die Tracen der zu jener Ebene senkrechten Hauptschnitte. Gleichwerthige Seiten machen wir durch gleiche Dicke kenntlich und zeichnen dieselben auch gleich weit abstehend von dem gemeinsamen Kreuzungspunkte der Hauptschnitte, in welchem Falle wir sagen, dass die Seiten und die von denselben gebildete Figur im Gleichgewichte sind. Doch würde der krystallographische Charakter dieser Figuren durch beliebiges paralleles Verschieben der Seiten natürlich nicht geändert werden; in krystallographischer Hinsicht besteht kein Unterschied zwischen einem Rechtecke und einem Quadrate, oder zwischen einem regelmässigen Sechsecke und einem anderen Sechsecke, in welchem zwar alle Winkel gleich, die Seiten es aber nicht sind.

Wir bemerken noch, dass auf jeder Ebene immer Seiten parallel und senkrecht zu der Trace irgend eines Hauptschnittes möglich sind. Die Hauptschnitte sind ja parallel von möglichen Krystallflächen, sie stehen aber auch senkrecht zu den Flächen einer möglichen Krystallzone, da ja dem §. 22 zufolge diess für alle Flächen gilt, nach welchen ein Krystall isoschematisch ist.

Gehen wir zur Betrachtung der verschiedenen Fälle von Ebenen über, wobei wir jedoch annehmen wollen, dass in denselben mit jeder Seite auch die gleichwerthigen vorkommen. In den Zeichnungen lassen wir, wie gesagt, gleichwerthige Seiten auch immer gleich weit von einem und demselben Punkte der betrachteten Ebene abstehen lassen, so dass der Umriss sich im Gleichgewichte befindet. Stehen in diesem Falle die gleichwerthigen Ebenen nur von dem einzigen Punkte O

gleich weit ab, so nennen wir *O* den Mittelpunkt des Umrisses, der im entgegengesetzten Falle jedoch keinen Mittelpunkt hat.

1. Triklinische Ebenen, mit welchem Namen wir Flächen und Schnitte eines Krystalles bezeichnen, die auf gar keinem Hauptschnitte desselben senkrecht stehen. Die Form derselben ist ersichtlich äusserst mannigfaltig; gleichwerthige Seiten können an denselben im Allgemeinen nicht angetroffen werden. Da die einfachste geschlossene, geometrische Figur ein Dreieck ist, so muss auch die einfachste triklinische Ebene wenigstens von dreierlei Seiten begrenzt sein. Diess gibt uns das krystallographische ungleichseitige Dreieck Fig. 33, in welchem alle drei Seiten ungleichwerthig sind; in speziellen Fällen kann dasselbe gleichschenklig und selbst gleichseitig sein, ohne dass es im krystallographischen Sinne aufhören würde, ungleichseitig zu sein. Triklinische Ebenen, die von vier Seiten begrenzt sind, geben uns ein krystallographisches Trapezoid, Fig. 34, in welchem alle vier Seiten ungleichwerthig sind, und das in geometrischer Hinsicht auch ein Trapez, Rhombus etc. sein kann, da, wie wir wissen, zu jeder Seite ja auch eine parallele möglich ist.

2. Monoklinische Ebenen, senkrecht zu einem einzigen Hauptschnitte, demzufolge wir im Falle der Holosymmetrie zwei gleichwerthige Richtungen, Fig. 35, gleich geneigt zur Trace des Hauptschnittes, haben. Solche Ebenen müssen offenbar von wenigstens zweierlei Seiten begrenzt sein, damit man eine geschlossene Figur erhält. Diess gibt uns das krystallographische Deltoid, Fig. 36, ein Viereck, dessen Seiten senkrecht zu zwei Paar gleichwerthigen Richtungen sind, das daher zwei gleiche, einander gegenüberliegende Winkel haben wird und das also im Gleichgewichte mit dem Deltoide der Geometrie übereinstimmt. Diese Figur, das krystallographische Deltoid, kann in speziellen Fällen wieder ein Parallelogramm, Rhombus, Quadrat werden. Es ist auch leicht einzusehen, dass, wenn noch ein drittes Paar gleichwerthiger Seiten auftritt, die monoklinische Ebene einen Umriss etwa wie Fig. 37 erhält.

Ist von den gleichwerthigen Richtungen 1 und 2 eine parallel der Trace des Hauptschnittes, so wird es natürlich auch die andere sein; es ist also auch eine Seite senkrecht zur Trace des Hauptschnittes möglich, was im Einklange mit dem schon früher Gesagten ist. Die hiedurch entstehenden Umrisse können wir leicht dadurch ableiten, dass wir in den vorhergehenden Figuren zwei gleichwerthige Seiten in eine einzige, zur Trace des Hauptschnittes senkrechte Seite übergehen lassen. Fig. 38 gibt dann das krystallographische gleichschen-

klige Dreieck, in welchem zwei gleichwerthige Seiten gleich geneigt zu einer dritten Seite sind; Fig. 39 aber gibt ein symmetrisches Fünfeck mit zwei Paar gleichen Winkeln. Fallen in der letzten Figur noch zwei andere gleichwerthige Seiten zusammen, so erhält man einen Umriss wie Fig. 40.

Ist eine der Richtungen 1 und 2 senkrecht zur Trace des Hauptschnittes, so ist es auch die andere, es sind also auch zwei gleichwerthige Seiten möglich parallel dem Hauptschnitte. Aus den früheren Umrissen erhalten wir hiedurch die durch Fig. 41—43 dargestellten.

Im Falle der Hemisymmetrie sind die beiden Richtungen 1 und 2 nicht mehr gleichwerthig; die monoklinische Ebene geht in eine triklinische über, und wird daher auch in Umrissen auftreten, wie sie den letzteren Ebenen entsprechen.

3. Rhombische Ebenen, senkrecht zu rhombischen Axen; dieselben besitzen für den Fall der Holosymmetrie vier gleichwerthige Richtungen, die durch die bezifferten Linien der Fig. 44 repräsentirt sind. Senkrecht zu solchen Richtungen haben wir vier gleichwerthige Seiten, welche uns einen krystallographischen Rhombus geben, Fig. 45. Kommen an der betrachteten Ebene zweierlei gleichwerthige Seiten vor, so muss ihre Anordnung ähnlich wie Fig. 46 sein. Wird in der letzten Figur aber eine der dünnen Seiten parallel einem Hauptschnitte, so werden diess auch die übrigen dünnen Seiten, und man erhält die Fig. 47; findet dasselbe auch noch für die dicken Seiten statt, so erhalten wir ein Rechteck, Fig. 48, dessen gegenüberliegende Seiten gleichwerthig sind. Wir übergehen die Fälle, in welchen mehr als zweierlei Seiten eine rhombische Ebene begrenzen; nach dem bisher Gesagten ist es ja auch für diese Fälle leicht anzugeben, welches im Allgemeinen die Anordnung der Seiten sein muss.

In hemisymmetrischen rhombischen Ebenen können entweder nur Richtungen wie 1, 2 gleichwerthige sein, in welchem Falle die Ebenen offenbar in monoklinische übergehen, oder aber, es sind nur Richtungen wie 1, 3 gleichwerthig. Solche hemisymmetrische rhombische Ebenen müssen wenigstens von zweierlei Seiten begrenzt sein, welche alsdann Umrisse wie die Fig. 49, in speziellen Fällen aber auch wie die Fig. 50, 51 haben werden. Eine von dreierlei Seiten begrenzte hemirhombische Ebene wäre Fig. 52, auf deren spezielle Fälle wir jedoch nicht weiter eingehen wollen.

4. Tetragonale Ebenen, senkrecht zu vier Hauptschnitten, die sich unter Winkeln von 45° schneiden, mit acht gleichwerthigen Richtungen für den Fall der Holosymmetrie, Fig. 54. Als Umriss solcher

Ebenen mit bloss einerlei Seiten haben wir im allgemeinen Falle das krystallographische symmetrische Achteck, Fig. 54, in welchem die abwechselnden Winkel gleich und alle Seiten gleichwerthig sind. Ist in dieser Form einè Seite parallel einem Hauptschnitte, was ja immer möglich ist, so fallen je zwei Seiten in eine zusammen, und wir erhalten das krystallographische Quadrat, Fig. 55, das in geometrischer Hinsicht auch ein Rechteck werden kann. Als allgemeinen Umriss tetragonaler Ebenen mit zweierlei Seiten haben wir ein Sechzehneck, Fig. 56, welches durch Spezialisirung in ein Zwölfeck, Fig. 57, und schliesslich in ein Achteck, Fig. 58 übergeht.

Für hemisymmetrische Ebenen sind entweder nur Richtungen wie 1, 2, 5, 6 oder wie 1, 3, 5, 7 gleichwerthige. Im ersteren Falle werden die tetragonalen Ebenen zu rhombischen, im zweiten aber erhalten wir als allgemeinsten Umriss solcher von einerlei Seiten begrenzten Ebenen ein krystallographisches Quadrat, Fig. 59, welches im Allgemeinen von intermediärer Lage ist, in speziellen Fällen aber mit den Seiten auch parallel zweien Hauptschnitten sein kann, Fig. 60. Würden an einer solchen hemitetragonalen Ebene zweierlei Seiten vorkommen, so müssten dieselben im allgemeinen Achtecke wie Fig. 61, in speziellen Fällen aber wie die Fig. 62, 63 bilden.

5. Trigonale Ebenen, senkrecht zu trigonalen Axen; dieselben besitzen im Allgemeinen sechs gleichwerthige Richtungen, dargestellt in Fig. 64; wird jedoch eine derselben parallel einem Hauptschnitte, so fallen je zwei derselben zusammen und reduziren sich somit auf drei. Diess gibt uns als allgemeinen Fall einer von bloss gleichwerthigen Seiten begrenzten trigonalen Ebene das krystallographische symmetrische Sechseck, Fig. 65, mit abwechselnd gleichen Winkeln, für Ebenen mit zweierlei Seiten aber ein Zwölfeck, Fig. 68. Die speziellen Fälle dieser Umrisse sind in den Fig. 66, 67 und 69—72 dargestellt, unter welchen Fig. 67 das krystallographische gleichseitige Dreieck ist.

Im Falle der Hemisymmetrie sind nur Richtungen wie 1, 3, 5 gleichwerthig. Verlängern wir daher in Fig. 65 die diesen Richtungen entsprechenden Seiten, so erhalten wir als allgemeinen Umriss der nur von gleichwerthigen Seiten begrenzten hemisymmetrischen trigonalen Ebenen ein krystallographisches gleichseitiges Dreieck, Fig. 73, von intermediärer Stellung mit Bezug auf die Hauptschnitte; dasselbe kann jedoch in speziellen Fällen auch in das frühere krystallographische, gleichseitige Dreieck übergehen, Fig. 74, 75. Durch Kombination solcher

zwei Dreiecke erhalten wir für hemisymmetrische Ebenen, die von zweierlei Seiten begrenzt sind, Umrisse wie Fig. 76—81.

6. Hexagonale Ebenen, senkrecht zu sechs Hauptschnitten, welche im Falle der Holosymmetrie zwölf gleichwerthige Richtungen bedingen, Fig. 82; diess gibt uns für solche Ebenen mit bloss einerlei Seiten das krystallographische symmetrische Zwölfeck, Fig. 83 mit abwechselnd gleichen Winkeln. Wird eine Seite desselben parallel einem Hauptschnitte, so erhalten wir als speziellen Fall das krystallographische reguläre Sechseck, Fig. 84. Für die Ebenen mit zweierlei Kanten haben wir als allgemeinsten Fall ein Vierundzwanzigeck, das in speziellen Fällen in ein Achtzehneck und schliesslich in ein Zwölfeck, Fig. 85 mit lauter gleichen Winkeln und abwechselnd gleichwerthigen Seiten übergeht.

Sind im Falle der Hemisymmetrie nur Richtungen wie 1, 2, 5, 6, 9, 10 gleichwerthig, so gehen diese Ebenen offenbar in trigonale über. In dem Falle der Hemisymmetrie jedoch, in welchem Richtungen wie 1, 3, 5, 7, 9, 11 gleichwerthig sind, erhalten wir für die Umrisse solcher Ebenen mit einerlei Seiten ein krystallographisches reguläres Sechseck von intermediärer Stellung, Fig. 86, welches jedoch auch in das frühere derartige Sechseck übergehen kann, Fig. 87. Für die von zweierlei Seiten begrenzten Ebenen haben wir Umrisse wie Fig. 88—90.

Aus dieser Aufzählung ersieht man, dass nur die drei zuletzt genannten Ebenen, und die rhombischen im Falle der Holosymmetrie einen Mittelpunkt haben. Der triklinischen Ebenen gibt es natürlich an jedem Krystalle unendlich viele, und auch der monoklinischen in solchen Krystallen, die wenigstens einen Hauptschnitt besitzen. Man kann daher die Umrisse dieser Ebenen sehr variiren und einzelnen Winkeln derselben beliebige Werthe ertheilen, wenn man eben die unbestimmt gelassene Richtung jener Ebene auf gehörige Weise wählt. Der vier anderen Arten von Ebenen gibt es aber nur eine bestimmte Anzahl, da dieselben senkrecht zu Hauptaxen sind. Letztere Ebenen müssen auch immer parallel einer möglichen Krystallfläche sein, da sie ja senkrecht stehen auf wenigstens zwei Hauptschnitten, der Krystall also auch isoschematisch sein muss nach der zu diesen Hauptschnitten senkrechten Ebene, die daher eine mögliche Fläche des Krystalles ist. Für das hexagonale, tetragonale und rhombische System müssen aber jene Ebenen sogar parallel von Hauptschnitten sein, wovon man sich leicht durch die Betrachtung der Anordnung, welcher die Hauptschnitte dieser Systeme unterworfen sind, überzeugt.

Wir haben bei den vorhergehenden Betrachtungen vorausgesetzt, dass zu jeder Seite einer Ebene auch die gleichwerthigen vorkommen; diess wird allerdings für jede Ebene der Fall sein, die im beliebigen Abstande vom Mittelpunkte eine holoedrische Krystallgestalt schneidet, deren Flächen sich im Gleichgewichte befinden. Kommen an einer solchen im Gleichgewichte befindlichen Krystallgestalt auch hemiedrische Formen vor, so wird die frühere Bedingung nur mehr für Ebenen erfüllt sein, die durch den Mittelpunkt der Gestalt gehen. Für andere Ebenen wird sich jedoch der Umriss derselben aus den einfachen Figuren zusammensetzen, die wir früher theils als holosymmetrische, theils als hemisymmetrische der betreffenden Gattung von Ebenen kennen gelernt haben, ja der Umriss kann sich auch bloss aus letzteren Figuren zusammensetzen. Die allgemeinen Gesetze des Ausbleibens der Flächen sind ja, wenn wir bloss ein Ende irgend einer Axe eines Krystalles betrachten, ganz dieselben für Hemisymmetrie und Hemiedrie. Wir können daher für gewisse Ebenen, wenn wir bloss den Umriss derselben betrachten, im Zweifel sein, ob dieselben einen hemisymmetrischen oder bloss einen hemiedrischen Charakter haben, ein Zweifel, der sich freilich immer durch die Betrachtung der physikalischen Eigenschaften der Ebene lösen lässt. Man kann aber den wahren Charakter einer solchen Ebene auch dadurch ermitteln, dass man parallel dieser Ebene andere in verschiedenen Abständen vom Mittelpunkte der Krystallgestalt durch dieselbe legt, welche Ebenen offenbar alle denselben krystallographischen Charakter haben müssen. Zwei Ebenen nun, welche zu beiden Seiten des Mittelpunktes der im Gleichgewichte befindlichen Krystallgestalt gleich weit von diesem Mittelpunkte abstehen, müssen im Falle der Holoedrie gleiche und gleich liegende Umrisse haben. Im Falle der Hemiedrie werden diese Umrisse zwar auch noch gleich sein, aber gerade entgegengesetzte Lage haben. Durch zwei solche Ebenen gelingt es also, holoedrische hemisymmetrische Ebenen von hemiedrischen holosymmetrischen zu unterscheiden. Kommt man bei der Untersuchung der zu einer zweifelhaften Ebene parallelen Ebene auf eine, in deren Umriss holoedrische Figuren auftreten, so ist natürlich die Frage nach dem Charakter jener Ebene hiedurch schon gelöst.

Es können natürlich auch hemisymmetrische Ebenen hemiedrisch sein; solche Ebenen haben im Allgemeinen nur den vierten Theil der Seiten, wie die entsprechenden holoedrischen holosymmetrischen Ebenen. Wir haben dieselben im Vorhergehenden nicht berücksichtigt, ihre Figuren würden sich aber leicht auf die angegebene Weise feststellen lassen.

Es ist klar, dass der Charakter einer Ebene bekannt ist, sobald man den Charakter der Richtung kennt, auf der jene Ebene senkrecht steht. Jene Methode der Untersuchung paralleler Ebenen werden wir aber auch für solche Ebenen anzuwenden haben, deren Umriss für verschiedene Unterabtheilungen derselben Klasse von Ebenen möglich ist. So kann z. B. das krystallographische gleichseitige Dreieck sowohl eine holosymmetrische als auch hemisymmetrische trigonale Ebene begrenzen.

Das was wir bisher über die Erkennung des Charakters einer Ebene mit Hilfe der Kenntnisse, die wir uns von den Formen der verschiedenen Ebenen verschafft haben, sagten, setzt immer voraus, dass wir auch im Stande sind, gleichwerthige Seiten wirklich als solche zu erkennen. Verzichten wir aber auf die Untersuchung der physikalischen Eigenschaften, so bleiben uns als Kriterien gleichwerthiger Seiten nur mehr die gleiche oder gerade entgegengesetzte Grösse derselben und das gleichzeitige Auftreten derselben. Wir wissen ja, dass gleichwerthige Flächen in der Regel auch gleichzeitig und in gleich grosser Entwicklung an einem Krystalle auftreten. Diese Kriterien sind freilich nicht immer hinreichend, um die gleichwerthigen Seiten zu erkennen, besonders in dem Falle der Hemisymmetrie, wo zweierlei gleichwerthige Seiten eine scheinbar holosymmetrische Form bilden. Aber auch hier kann man bei zweifelhaften Ebenen durch gleichzeitige Untersuchung der mit ihr parallelen Ebenen meist zur wahren Kenntnis ihres Charakters gelangen. Bei der Auffindung gleichwerthiger Seiten hat man natürlich solche parallele Seiten mit einer Grösse von 90° immer ausser Acht zu lassen, da, wie wir gesehen, a priori eben so viel Wahrscheinlichkeit vorhanden ist, dass jene Seiten keine gleichwerthigen sind.

§. 33. Symmetrieverhältnisse der Ecken der Krystalle.

Auch die Symmetrie, die wir in der Anordnung der Flächen und Kanten an den Ecken eines Krystalles wahrnehmen, gestattet einen Schluss auf das System, in welches derselbe gehört; denn die Symmetrie der Ecken ist ja natürlich auch abhängig von der Anzahl und Vertheilung der Symmetrieebenen. Zur Beurtheilung der Symmetrie eines Eckes haben wir uns die Flächen desselben so angeordnet zu denken, dass gleichwerthige gleich weit von einem und demselben Punkte O abstehen, und keine einspringenden Winkel gebildet werden. Verbinden wir nun die Spitze des Eckes mit jenem Punkte O, so wird von dem krystallographischen Charakter dieser Linie, die wir die Axe des

Eckes nennen wollen, wesentlich auch die Anordnung der Flächen dieses Eckes abhängen müssen, gerade so, wie auch der Umriss des Schnittes, der senkrecht zu dieser Linie durch den Krystall geführt wird, durch den Charakter dieser Linie bestimmt ist. Wenn wir nun zwischen einfachen, zweizähligen, dreizähligen u. s. f. Ecken unterscheiden, je nachdem sie bloss von einerlei oder verschiedenen gleichwerthigen Flächen gebildet werden, so ist klar, dass dem entsprechend die Schnitte senkrecht zu den Axen solcher Ecken auch von einer, zwei, drei Arten von Seiten begrenzt sein müssen, insoferne nämlich keine anderen Flächen als die, welche das Eck bilden, daran vorkommen. Um das Letztere zu erreichen, brauchen wir ja nur den Schnitt nahe genug an dem betreffenden Ecke durch den Krystall zu führen.

Die Kanten einfacher Ecken entsprechen nicht etwa nothwendigerweise gleichwerthigen Richtungen, diess wird nur dann der Fall sein, wenn Ebenen, die zu diesen Kanten senkrecht sind, wirklich mit Bezug auf die Axe des Eckes gleichwerthig sein müssen. Andererseits können aber die Kanten zweizähliger Ecken alle unter sich gleichwerthig sein.

Aus dem Gesagten ergibt sich, dass wir, um uns eine Vorstellung von den Symmetrieverhältnissen der verschiedenen Arten von Ecken zu bilden, nur in den Figuren des vorhergehenden Paragraphes, welche uns die verschiedenen Arten von Ebenen repräsentiren, die Ecken derselben mit dem Punkte O durch Linien zu verbinden brauchen. Diese Linien werden uns die Kanten eines Eckes repräsentiren müssen, dessen Spitze in den Punkt O fällt und das so vielzählig ist, als von verschiedenen Seiten der betreffende Umriss begrenzt wird. Auch wird sich leicht erkennen lassen, welche von den Kanten, in Folge der um die Normale jenes Schnittes herrschende Symmetrie gleichwerthigen Richtungen entsprechen müssen.

Wir werden also triklinische, monoklinische, rhombische, tetragonale, trigonale und hexagonale Ecken haben, die wieder in holosymmetrische und hemisymmetrische zerfallen. Alle diese Ecken werden wir mit Hilfe der zu ihren Axen senkrecht geführten Schnitte erkennen, insbesondere werden wir dadurch auch die wirklich hemisymmetrischen Ecken von den bloss holoedrisch ausgebildeten nach den im §. 32 Gesagten unterscheiden können. Es erscheint daher auch überflüssig, hier wie bei den Schnitten die verschiedenen Arten einfacher und zweizähliger Ecken aufzuzählen, und wir beschränken uns auf folgende Beispiele:

Die Figuren 48, 54, 76 geben uns nämlich unter Anwendung der angegebenen Methoden folgende Ecken:

Fig. 91, ein rhombisches Eck, welches vierflächig und zweizählig ist; die vier Kanten desselben entsprechen offenbar gleichwerthigen Richtungen.

Fig 92, ein tetragonales Eck, und zwar ein achtflächiges einfaches Eck, von dessen 8 Kanten aber nur je vier abwechselnde gleichwerthig sind.

Fig. 93, ein hemitrigonales Eck, welches sechsflächig und zweizählig ist, indem nur die abwechselnden Flächen gleichwerthig sind; ebenso entsprechen von den 6 Kanten nur je 3 abwechselnde gleichwerthigen Richtungen.

§. 34. Einfluss der Temperatur auf die Lage der Flächen der Krystalle.

Wie das im §. 26 entwickelte Gesetz der Symmetrie lehrt, ist von allen physikalischen Eigenschaften der Krystalle besonders das Verhalten derselben gegen Aenderungen der Temperatur für die Krystallographie von Wichtigkeit. Wir wollen daher auch dieses Verhalten hier noch etwas näher in Betracht ziehen.

Zuvörderst bemerken wir, dass, wie diess auch schon im Vorhergehenden immer vorausgesetzt wurde, das Gesetz der Rationalität der Indices für die Flächen eines Krystalles bei jeder Temperatur desselben gelten muss, wenigstens insolange, als durch dieselbe der Zusammenhang der einzelnen Theilchen des Krystalles nicht gestört wird. Freilich sind die Beobachtungen, auf welche sich das erste Hauptgesetz stützt, nur bei Temperaturen angestellt, die innerhalb enger Grenzen liegen. Berücksicht man aber, dass diese Temperaturen, für welche das Gesetz sich immer als richtig erwies, sehr verschieden weit entfernt sind von jenen Punkten, bei denen sich die verschiedenen untersuchten Krystalle gebildet haben, so ergibt sich hieraus wohl die allgemeine Giltigkeit des folgenden Satzes:

I. „Die Krystalle sind bei jeder Temperatur, bei der sie als solche bestehen können, dem Gesetze der Rationalität der Indices unterworfen.“

Eine zweite hieher gehörige, wichtige Eigenschaft der Krystalle ist die, der zufolge die Aenderungen, welche die Lage der Flächen eines Krystalles bei Aenderungen der Temperatur erfährt, stetig vor sich gehen, so also, dass auch bei der kleinsten Zu- oder Abnahme der Temperatur, die gegenseitige Lage der Flächen eine entsprechende kleine Aenderung erfährt. Diese Eigenschaft der Krystalle ist durch die Erfahrung allerdings auch wieder nur innerhalb gewisser Temperaturen nachgewiesen, mit Bezug auf die letzteren gilt aber offenbar

auch hier die bei dem ersten Satze gemachte Bemerkung. Auch steht diese Eigenschaft der Krystalle in innigem Zusammenhange mit dem Verhalten unkrystallisirter Körper gegen Aenderungen der Temperatur; die Ausdehnung der gewöhnlichen Körper durch die Wärme geschieht ja auch stetig, ebenso wie deren Zusammenziehung. Der Umstand jedoch, dass dem Gesagten zufolge die Neigung zweier Krystallflächen sich nicht sprungweise, sondern stetig mit der Temperatur ändert, schliesst nicht aus, dass ein solcher Winkel sich gar nicht ändere, falls die Symmetrieverhältnisse des betreffenden Krystalles bei jeder Temperatur denselben Werth für jene Neigung fordern. Mit Rücksicht hierauf können wir also folgenden Erfahrungssatz aussprechen:

II. „Die Neigung je zweier Flächen eines Krystalles ändert sich stetig mit der Temperatur, es sei denn, dass dieser Winkel in Folge der Hauptschnitte des Krystalles einen konstanten Werth haben muss."

Da sich die Lage jeder Fläche P eines Krystalles sowohl bloss durch die Winkel zwischen Flächen dieses Krystalles, als auch durch ihre Indices bestimmen lässt, so muss es immer möglich sein, die Indices von P durch jene Winkel auszudrücken und umgekehrt. Dem vorhergehenden Satze zufolge ändern sich aber jene Winkel stetig mit der Temperatur, und es werden daher auch die bloss von jenen Winkeln abhängenden Indices der Fläche P sich stetig ändern müssen, falls sie nicht etwa konstant sind. Die Indices der Fläche P müssen sich aber auch bei jeder Temperatur wie rationale Zahlen verhalten, da ja dem ersten Satze dieses Paragraphes zufolge das Gesetz der Rationalität der Indices bei jeder Temperatur gilt. Eine Zahl kann sich aber nicht stetig ändern und dabei immer rational sein, es bleibt daher nur übrig anzunehmen, dass die Indices der Fläche P konstant sind. Diess gibt uns den Satz:

III. „Für jede Krystallfläche ist das Verhältnis ihrer Indices unabhängig von der Temperatur."

Es ist klar, dass in Folge dieses Satzes drei Flächen, die bei einer gewissen Temperatur in einer Zone liegen, überhaupt bei jeder Temperatur tautozonal sein müssen. Letzteren Satz hat man das Gesetz der Erhaltung der Zonen genannt, und es ist einleuchtend, dass dasselbe mit Satz III identisch ist. Weitere Folgerungen ergeben sich aber aus dem Satze II, wenn wir isoschematische Krystalle in Betracht ziehen; so können wir gleich sagen:

IV. „Ist ein Krystall bei jeder Temperatur isoschematisch nach einer seiner Flächen, so gibt es an diesem Krystalle eine mögliche Zone, die bei jeder Temperatur auf jener Fläche senkrecht steht."

Aus dem §. 22 geht nämlich hervor, dass jedenfalls bei jeder Temperatur immer eine Zone möglich sein muss, die senkrecht ist zu jener Fläche, P etwa. Betrachten wir z. B. die Temperatur t, bei der gerade die Zone Z senkrecht ist zu P, und nehmen wir jetzt an, die Temperatur ändere sich um die geringe Grösse τ, so wird bei der Temperatur $t + \tau$ jetzt eine Zone Y etwa senkrecht stehen auf P. Die Lage der Zone Z wird sich hiebei dem Satze II zufolge etwas wenig geändert haben, und es ist klar, dass diese Aenderung desto geringer ist, je kleiner wir τ wählen. Nehmen wir also an, τ wäre unendlich klein, so werden auch die Lagen der Axen der Zonen Z und Y und daher auch die Indices dieser Zonen unendlich wenig von einander verschieden sein. Wir wissen aber, dass auch die Indices einer Zone sich dem ersten Hauptgesetze zufolge wie rationale Zahlen verhalten, was nach Satz I offenbar bei jeder Temperatur stattfinden muss. Die Indices der beiden Zonen Z und Y, die sich nur unendlich wenig von einander unterscheiden, werden sich also doch wie rationale Zahlen verhalten müssen, diess ist aber für beide Zonen zu gleicher Zeit unmöglich, woraus hervorgeht, dass unsere Voraussetzung eine unrichtige ist, und dass also die Zone Z während der geringen Temperaturänderung τ seine Lage nicht ändert. Da wir aber jede Aenderung der Temperatur uns durch successive kleine Aenderungen hervorgebracht denken können, so ist somit der aufgestellte Satz allgemein bewiesen.

V. „Ist ein Krystall bei jeder Temperatur isoschematisch nach zwei seiner Flächen, so ist die Neigung dieser zwei Flächen unabhängig von der Temperatur.“

Nennen wir nämlich den Neigungswinkel der zwei Flächen φ, so würde, wenn für diesen Winkel der ausgesprochene Satz nicht gälte, dem Satze II zufolge φ sich wenigstens stetig mit der Temperatur ändern müssen; dasselbe würde aber offenbar auch mit dem Verhältnisse der Sehne dieses Winkels zum Halbmesser statthaben. Aus dem §. 20 folgt jedoch, dass letzteres Verhältnis auch immer von der Form $\sqrt{2 - \sqrt{m}}$ sein muss, wo m eine rationale Zahl bedeutet. Diese Bedingung für m macht es aber unmöglich, dass der Ausdruck $\sqrt{2 - \sqrt{m}}$ sich stetig ändere; es muss vielmehr der Winkel φ wirklich konstant sein.

Aus dem letzteren Satze folgt unmittelbar, dass, wenn ein Krystall bei jeder Temperatur isoschematisch ist nach zwei Flächen P, Q, die nicht auf einander senkrecht stehen, die Lage aller möglichen Flächen der Zone PQ von der Temperatur unabhängig ist, denn nach §. 23 ist

ein solcher Krystall auch isoschematisch nach jeder möglichen Fläche der Zone PQ, so dass sich auf je zwei Flächen dieser Zone der Satz V anwenden lässt.

Man kann nun leicht für jedes Krystallsystem diejenigen Neigungswinkel angeben, welche sich nicht mit der Temperatur ändern; im triklinischen Systeme ist freilich gar kein Winkel konstant, da es ja in diesem Systeme auch keinen Hauptschnitt gibt.

Im monoklinischen Systeme, welches einen Hauptschnitt besitzt, ändern alle Flächen, welche senkrecht auf diesem Hauptschnitte stehen, ihre Neigung zu demselben nicht. Die Neigungen dieser Flächen unter einander, sowie alle übrigen Neigungswinkel sind jedoch natürlich nicht konstant.

Im rhombischen Systeme mit 3 zu einander senkrechten Hauptschnitten ist der Winkel zweier zu einander senkrechten Flächen konstant, wenn wenigstens eine der letzteren parallel einem Hauptschnitte ist.

Tetragonale und hexagonale Krystalle haben einen Hauptschnitt, der senkrecht ist zu 4, beziehungsweise 6 tautozonalen Hauptschnitten (die Aequatorialzone). Solche Krystalle sind natürlich bei jeder Temperatur isoschematisch nach jeder Fläche der Aequatorialzone. Von der Temperatur unabhängig ist die Neigung jeder Fläche der Aequatorialzone zu jeder anderen Fläche dieser Zone und zu dem auf dieser Zone senkrecht stehenden Hauptschnitte.

Tesserale Krystalle sind, da es unter ihren 9 Hauptschnitten solche drei gibt, von denen nur zwei auf einander senkrecht stehen, bei jeder Temperatur isoschematisch nach jeder ihrer möglichen Flä- chen; es ist also die Neigung je zweier Flächen in diesem Systeme v[illegible] der Temperatur unabhängig, somit die Lage aller Flächen eine k[illegible] stante. Diess geht auch daraus hervor, dass alle fünf Elemente in die- sem Systeme durch die Hauptschnitte vollkommen bestimmt werden.

Dieses sind also die in den verschiedenen Krystallsystemen von der Temperatur unabhängigen Neigungswinkel. Dieselben lehren, dass triklinische Krystalle nach gar keiner Fläche bei jeder Tempera[illegible] isoschematisch sein können, dass monoklinische und rhombisc[illegible] Krystalle nur nach ihren Hauptschnitten, hexagonale und tet[illegible] gonale nur nach jeder Fläche der Aequatorialzone und nach d[illegible] dazu senkrechten Hauptschnitte bei jeder Temperatur isoschemati[illegible] sind. Denn gäbe es für irgend einen Krystall noch andere solche F[illegible] chen, so müssten an demselben nach Satz II und V Neigungswi[illegible] konstant sein, die in der vorhergehenden Aufzählung nicht entha[illegible] sind, und die sich daher in Wirklichkeit mit der Temperatur änder[illegible]

Hiedurch wird aber auch ein Bedenken gelöst, welches mit Bezug auf das im §. 26 aufgestellte Gesetz der Symmetrie erhoben werden kann. Aehnlich wie wir bei dem ersten Hauptgesetze erst dessen geometrische Möglichkeit nachzuweisen hatten, bevor wir die allgemeine Giltigkeit desselben annehmen konnten, so hat man bei dem zweiten Hauptgesetze dessen physikalische Möglichkeit in Betracht zu ziehen. Hier entsteht nämlich die Frage, ob denn wirklich die Hauptschnitte eines Krystalles immer einen charakteristischen Flächenkomplex desselben bilden müssen, d. h. ob an einem Krystalle nicht mehr Flächen vorkommen können, mit Bezug auf welche derselbe bei jeder Temperatur isoschematisch ist und die isoschematisch mit Bezug auf sich selbst sind, als die Anzahl seiner Hauptschnitte beträgt, d. i. der Flächen, nach denen der Krystall entweder holo- oder hemisymmetrisch ist.

Dass diess für tesserale Krystalle unmöglich ist, sieht man schon uf den ersten Blick, indem ja, wie wir gesehen, mehr als neun Krytallflächen überhaupt nicht isoschematisch mit Bezug auf sich selbst ein können. Aber auch für die übrigen Systeme ergibt sich die Unöglichkeit leicht aus dem vorher Gesagten; triklinische Krystalle ind ja nach gar keiner Fläche, monoklinische und rhombische nur nach hren Hauptschnitten bei jeder Temperatur isoschematisch. Tetragonale nd hexagonale Krystalle sind zwar nach einer unbegrenzten Anzahl on Flächen bei jeder Temperatur isoschematisch, diese liegen aber le in einer Zone mit Ausnahme einer einzigen zu dieser Zone senkchten Fläche (*T*). Unter diesen Flächen lassen sich offenbar keine un nachweisen, deren Anordnung dem Symbole III9 entspräche. Zu er Fläche *P* der tautozonalen Flächen sind aber nach §. 20, je chdem der Krystall tetragonal oder hexagonal ist, beziehungsweise ei oder fünf Flächen in derselben Zone möglich, die mit den Flächen und *T* einen nach II5, beziehungsweise II7 angeordneten Komplex den; unmöglich aber ist, dass in einer Zone zu gleicher Zeit nach und II7 angeordnete Flächen vorkommen (§. 21). Hiermit ist also eigt, dass auch an tetragonalen und hexagonalen Krystallen nicht hr als fünf, beziehungsweise sieben Flächen vorhanden sein können, isoschematisch mit Bezug auf sich selbst sind und nach denen die ystalle isoschematisch bei jeder Temperatur wären.

Aus den bisherigen Betrachtungen lernen wir aber auch, dass bei Aufsuchung der charakteristischen Flächenkomplexe eines Krylles uns nur folgende Fälle aufstossen können. Ein Krystall kann mlich bei jeder Temperatur isoschematisch sein:

1. nach gar keiner Fläche — triklinisches System;

2. nach einer einzigen Fläche, dann ist diese Fläche ein Hauptschnitt und der Krystall monoklinisch;

3. nach drei zu einander senkrechten Flächen, welche wieder Hauptschnitte sind und den Krystall als einen rhombischen charakterisiren;

4. nach allen Flächen einer Zone und der dazu senkrechten Fläche *W*, wobei in dieser Zone zu jeder Fläche eine gegen sie unter 45° geneigte möglich ist; ein solcher Krystall ist ein tetragonaler und die Fläche *W* der zur Aequatorialzone senkrechte Hauptschnitt desselben;

5. nach allen Flächen einer Zone und der dazu senkrechten Fläche *T*, wobei in dieser Zone zu jeder Fläche eine gegen sie unter 60° geneigte möglich ist; die Fläche *T* ist dann der zur Aequatorialzone des hexagonalen Krystalles senkrechte Hauptschnitt;

6. nach allen seinen Flächen, was bei den tesseralen Krystallen stattfindet.

§. 35. Schlussbetrachtungen über die Symmetrie der physikalischen Eigenschaften der Krystalle.

Nach den Betrachtungen des vorhergehenden Paragraphes wollen wir, ohne auf die Untersuchung der weiteren physikalischen Eigenschaften der Krystalle näher einzugehen, nur noch zum Schlusse dieses Kapitels einige der Gesetze angeben, welche sich für diese Eigenschaften unmittelbar aus den bisher angestellten Betrachtungen über die Symmetrieverhältnisse der Krystalle ergeben. Wir werden hiedurch auch noch klarer die Bedeutung erkennen, welche dem „Gesetze der Symmetrie" für das Studium der Krystalle zukömmt.

Betrachten wir vorerst die körperliche Beschaffenheit der Krystallflächen. Finden wir z. B., dass eine Fläche durch ihre Rauhigkeit sich konstant an allen Krystallen irgend einer Verbindung bemerkbar macht, so muss diess dem zweiten Hauptgesetze zufolge auch für alle Flächen der Fall sein, die mit der ersteren gleichwerthig sind. Dasselbe gilt natürlich auch für gekrümmte oder gestreifte Flächen. Was die letzteren betrifft, so wird die Streifung einer Fläche selbst im Einklange mit der Symmetrie dieser Fläche sein müssen. Es ist z. B. ganz unmöglich, dass eine trigonale Fläche eine Streifung nach einer einzigen ihrer Richtungen zeige, sondern eine solche Fläche muss wenigstens analoge Streifungen nach drei Richtungen wahrnehmen lassen, und diess nur, wenn die Streifung parallel den Tracen der Hauptschnitte ist oder wenn nach letzteren bloss Hemisymmetrie statt-

findet. Im Falle der Holosymmetrie hat ja eine trigonale Fläche im Allgemeinen sechs gleichwerthige Richtungen. Eine rhombische Fläche kann bloss nach einer Richtung gestreift sein, wenn diess die Trace einer der zwei Hauptschnitte ist, die senkrecht auf der rhombischen Fläche stehen; soll aber eine tetragonale Fläche nur nach einer Richtung gestreift sein, so ist diess nur möglich, wenn dieselben einen hemisymmetrischen Charakter hat. Ohne weitere Beispiele anzuführen, geht aus dem Gesagten hervor, dass man schon oft durch die blösse Streifung der Flächen eines Krystalles den holo- oder hemisymmetrischen Charakter desselben ermitteln kann.

Aehnliche Verhältnisse finden wir bei der Untersuchung der Härte, welche Flächen oder beliebige Schnitte eines Krystalles nach verschiedenen Richtungen hin aufweisen. Schneiden wir nämlich auf den durch denselben Punkt gezogenen Richtungen einer solchen Fläche von diesem Punkte aus Stücke ab, die proportional der nach der entsprechenden Richtung beobachteten, mit einem bestimmten Masse gemessenen Härte sind und verbinden die Endpunkte dieser Stücke durch eine kontinuirliche Kurve, so wird letztere eine Symmetrie aufweisen müssen, die im Einklange ist mit der Anzahl und Anordnung der Hauptschnitte, welche auf der untersuchten Fläche senkrecht stehen. So kann z. B. Fig. 94 die Härtekurve auf einer trigonalen Ebene mit holosymmetrischem Charakter, Fig. 95 oder 96 aber die für derartige rhombische Ebenen vorstellen; für triklinische Ebenen wird die Gestalt der Härtekurve natürlich eine ganz unsymmetrische sein.

Ganz dieselben Bemerkungen müssen auch für die Kurven gelten, welche uns die Leitungsfähigkeit für Wärme nach den einzelnen Richtungen der Ebene eines Krystalles angeben. Wirklich ausgeführte Untersuchungen haben aber gelehrt, dass in diesem Falle die Kurven immer Ellipsen werden, die in speziellen Fällen natürlich auch Kreise sein können. Für eine solche Ellipse kann es sich aber ersichtlich nur darum handeln, anzugeben, welches in Folge der Symmetrieverhältnisse einer Ebene die Lage der Hauptaxen sein muss.

Für triklinische Ebenen können wir natürlich in Folge der mangelnden Symmetrie gar nichts über die Lage der Hauptaxen der Wärmeleitungs-Ellipse aussagen. Bei holosymmetrischen rhombischen Ebenen jedoch werden die Axen der Ellipse mit den Tracen der Hauptschnitte zusammenfallen müssen, im Falle der Hemisymmetrie aber auch wieder jede beliebige Lage haben können.

Mit der Symmetrie der holo- und hemisymmetrischen trigonalen, hexagonalen und tetragonalen Ebenen (die hemisymmetrischen tetra-

gonalen Ebenen ausgenommen) lässt sich aber eine Ellipse nur dann in Einklang bringen, wenn ihre Axen gleich lang werden und sie also in einen Kreis übergeht. Auf solchen Ebenen eines Krystalles wird sich daher die Wärme nach allen Richtungen gleich schnell fortpflanzen müssen. Allein ausser diesen Daten lässt sich noch mehr über die Lage der Wärmeleitungskurven durch den Umstand angeben, dass sie nur Ellipsen oder Kreise sind. Wie wir nämlich bei Richtungen, die in einer Ebene liegen, die Wärmeleitungsfähigkeit durch Kurven darstellen, so werden wir für alle Richtungen eines Krystalles eine Oberfläche erhalten, welche in beliebiger Richtung geschnitten offenbar die diesem Schnitte entsprechende Wärmeleitungskurve geben muss. Da nun diese Kurven nur Ellipsen sein können, so folgt hieraus, dass jene Oberfläche im Allgemeinen ein Ellipsoid sein muss; die Lage der Hauptschnitte desselben wird aber natürlich auch durch die Symmetrie des betreffenden Krystalles bedingt sein. In dem tesseralen Systeme werden dieselben offenbar parallel sein müssen mit den Durchschnitten der drei zu einander senkrechten Hauptschnitte. Diese drei Hauptschnitte sind aber gleichwerthig, also müssen auch ihre Durchschnitte mit dem Wärmeleitungsellipsoid alle einander gleich sein. Diess ist aber nur möglich, wenn das Ellipsoid in eine Kugel übergeht. Die Wärmeleitungsfähigkeit ist daher dieselbe für alle Richtungen eines tesseralen holo- oder hemisymmetrischen Krystalles, und die Wärmeleitungskurve auf allen Ebenen desselben ein Kreis.

Im tetragonalen Systeme werden die Axen des Ellipsoides ebenfalls mit den Durchschnitten dreier Hauptschnitte zusammenfallen müssen, die auf einander senkrecht stehen.

Von solchen drei Hauptschnitten sind aber im tetragonalen Systeme zwei gleichwerthig, daher das Ellipsoid ein Rotationsellipsoid wird, dessen Umdrehungsaxe mit der morphologischen Axe dieses Systemes zusammenfällt. Senkrecht zu dieser Axe wird sich daher die Wärme nach jeder Richtung gleich schnell fortpflanzen. Die Wärmeleitungskurve wird daher auf einer Ebene senkrecht zur morphologischen Axe ein Kreis sein, was mit dem über tetragonale Ebenen Gesagten übereinstimmt. Für jede andere Ebene wird die Kurve eine Ellipse, deren Axen beziehungsweise parallel und senkrecht zu einer Ebene sind, die durch die Normale der betrachteten Ebene und die morphologische Axe geht.

Für das hexagonale System wird dasselbe gelten, da in diesem Falle das Ellipsoid sogar mit drei tautozonalen Hauptschnitten dieselben Durchschnitte bilden soll.

Im rhombischen Systeme werden die Axen des Wärmeleitungsellipsoides ersichtlich ebenfalls parallel den Durchschnitten der drei zu einander senkrechten Hauptschnitte sein müssen.

Im monoklinischen Systeme wird eine Axe des Ellipsoids senkrecht zu dem einen Hauptschnitte sein müssen, der also parallel den beiden anderen Axen ist.

Für das triklinische System lässt sich natürlich gar nichts über die Lage der Axen des Wärmeleitungs-Ellipsoides von vornherein angeben.

Genau dasselbe, was wir hier von der Wärme gesagt haben, gilt aber auch mit Bezug auf Leitungsfähigkeit der Krystalle für die Elektrizität. In beiden Fällen ist es überflüssig, zu bemerken, dass für gleichwerthige Ebenen und Richtungen die Leitungsfähigkeit dieselbe sein muss.

Aehnliche Verhältnisse finden auch für das para- und diamagnetische Verhalten des Krystalle statt, welches wir ebenfalls durch ein Ellipsoid repräsentiren können.

Gehen wir zur Betrachtung der Lichterscheinungen über: Nach jeder Richtung eines Krystalles findet im Allgemeinen Doppelbrechung statt, indem das Licht sich nach jeder solchen Richtung in zwei linearpolarisirte Strahlen mit ungleicher Geschwindigkeit fortpflanzt, wobei jedoch die Schwingungsrichtungen dieser zwei Strahlen immer senkrecht zu einander sind. Trägt man sich von einem Punkte im Inneren eines Krystalles nach den verschiedenen Richtungen desselben die entsprechenden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der zwei Lichtstrahlen auf, und verbindet die Endpunkte dieser Längen durch eine stetige Oberfläche, so erhält man die sogenannte Wellenfläche. Es ist dieser Konstruktion zufolge klar, dass die Wellenfläche im Allgemeinen von jeder durch ihren Mittelpunkt gezogenen Geraden zu beiden Seiten desselben in zwei Punkten geschnitten wird, und dass dieselbe daher aus zwei Schichten bestehen wird. Das Studium der Wellenfläche hat aber ergeben, dass dieselbe immer symmetrisch nach drei Ebenen ist, die auf einander senkrecht stehen, und die man die Hauptschnitte der Wellenfläche oder auch die optischen Hauptschnitte des Krystalles nennt. Der Durchschnitt der Wellenfläche mit jedem optischen Hauptschnitte ist aber eine Ellipse und ein Kreis, welche also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit für Richtungen angeben, die parallel den betreffenden Hauptschnitten sind. Die zwei Schwingungsebenen, welche den beiden Strahlen einer solchen Richtung entsprechen, sind beziehungsweise parallel und senkrecht den betreffenden

optischen Hauptschnitten. Die Halbaxen der Ellipse und des Radius des Kreises, in welchen Kurven die Wellenfläche einen ihrer Hauptschnitte schneidet, sind aber drei Grössen, die sich auch für die andern zwei Hauptschnitte, nur anders kombinirt, wiederholen. Die ganze Wellenfläche hängt überhaupt nur von diesen drei Grössen ab.

Bei der Wellenfläche haben wir zwei spezielle Fälle zu betrachten. Der erste ist der, wenn dieselbe mit zwei optischen Hauptschnitten die gleichen Durchschnitte bilden soll. Die Wellenfläche zerfällt alsdann in ein Rotations-Ellipsoid und in eine Kugel, welch' letztere das Ellipsoid in dem Endpunkte der Rotationsaxe berührt. Diese Axe ist natürlich die Durchschnittslinie jener zwei gleichen Hauptschnitte. Es wird aber überhaupt in diesem Falle ersichtlich jede durch die Rotationsaxe gelegte Ebene dieselben Durchschnitte mit der Wellenfläche bilden, daher auch jede solche Ebene als optischer Hauptschnitt aufzufassen ist. Längs der Rotationsaxe wird keine Doppelbrechung stattfinden, für alle Richtungen aber, die denselben Winkel mit der Rotationsaxe bilden, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit jedes Strahles einen konstanten Werth haben. Die Schwingungsebenen der zwei Strahlen, die einer beliebigen Richtung entsprechen, werden offenbar beziehungsweise senkrecht und parallel zu der Ebene sein müssen, die durch die zugehörige Richtung und die Rotationsaxe geht; diese Ebene ist ja ein optischer Hauptschnitt.

Der zweite spezielle Fall ist der, in welchem die Durchschnitte der Wellenfläche mit allen drei Hauptschnitten dieselben sind. Die Wellenfläche muss alsdann in eine blosse Kugel übergehen. In diesem Falle wird daher nach keiner Richtung Doppelbrechung stattfinden, und das Licht sich überall hin mit gleicher Geschwindigkeit in unpolarisirten Strahlen fortpflanzen, d. h. der betreffende Krystall wird ein gewöhnlicher, einfach brechender Körper sein. Diese zwei speziellen Fälle der Wellenfläche müssen nun wirklich an Krystallen vorkommen, indem ja die Lage der optischen Hauptschnitte auch durch die allgemeinen Symmetriegesetze der Krystalle bestimmt wird.

Bei triklinischen Krystallen wird man freilich von vornherein nichts über die Lage der Hauptschnitte der Wellenfläche aussagen können; bei solchen Krystallen wird auch die Lage der optischen Hauptschnitte für verschiedenfarbiges Licht eine andere sein können, was auch mit der Beobachtung übereinstimmt, welche uns lehrt, dass die optischen Hauptschnitte immer nahe an einander liegen.

Bei monoklinischen Krystallen wird jedoch schon einer der opti-Hauptschnitte mit dem krystallographischen, und zwar für alle

Farben zusammenfallen müssen, sollen eben die Erscheinungen der Doppelbrechung dieselbe Symmetrie wie die krystallographischen Verhältnisse solcher Krystalle zeigen.

Für rhombische Krystalle wird offenbar die Lage der Wellenfläche eine solche sein müssen, dass jeder ihrer Hauptschnitte für alle Farben des Lichtes mit einem krystallographischen Hauptschnitte zusammenfällt.

Auch für tetragonale und hexagonale Krystalle werden die optischen Hauptschnitte mit drei der krystallographischen zusammenfallen müssen, damit ist aber der Symmetrie dieser Krystalle noch nicht Genüge geleistet; es wird vielmehr für die Wellenfläche solcher Krystalle der erste der früher erwähnten speziellen Fälle eintreten müssen. Dieselbe wird in ein Rotations-Ellipsoid und in eine dasselbe berührende Kugel zerfallen, so zwar, dass die Rotationsaxe für alle Farben parallel der Axe der Aequatorialzone solcher Krystalle wird. Die Gesetze der Lichtbewegung im Inneren solcher Krystalle ergeben sich unmittelbar aus dem schon früher Gesagten.

Bei tesseralen Krystallen endlich werden die Hauptschnitte der Wellenfläche für alle Farben mit den drei krystallographischen Hauptschnitten zusammenfallen müssen, die auf einander senkrecht stehen. Die optischen Hauptschnitte werden aber auch alle drei identisch dieselben sein müssen, soll auch der Symmetrie nach den übrigen der krystallographischen Hauptschnitte genügt werden; diess bedingt, dass die Wellenfläche eine Kugel wird. Tesserale Krystalle werden sich daher rücksichtlich der Lichtbrechung gar nicht von gewöhnlich unkrystallisirten Substanzen unterscheiden.

Wir wollen jetzt noch den Durchgang des Lichtes durch eine aus zwei parallelen Ebenen gebildete Krystallplatte betrachten, und zwar in dem Falle, wo das Licht senkrecht zu einer dieser Ebenen auffällt. Beim Eintritte in die Krystallplatte wird das Licht im Allgemeinen in zwei Strahlenbündel zerlegt, die beim Austritte aus der zweiten Ebene wieder ihrer ursprünglichen Richtung parallel werden, und also senkrecht zur zweiten Ebene wieder in die Luft austreten. Diese zwei Strahlenbündel sind senkrecht zu einander polarisirt, die Tracen, welche ihre Schwingungsebenen auf der Austrittsebene jeder Krystallplatte bilden, wollen wir kurz die optischen Hauptschnitte jener Ebene nennen, dieselben stehen natürlich immer aufeinander senkrecht.

Es ist klar, dass die Lage der optischen Hauptschnitte einer Ebene wiederum von der für diese Ebene stattfindenden Symmetrie abhängt.

Indem wir die triklinischen Ebenen übergehen, wo für die Lage der optischen Hauptschnitte nichts von vornherein bestimmt werden kann, sehen wir, dass auf monoklinischen Ebenen einer der optischen Hauptschnitte für alle Farben mit der Trace des krystallographischen Hauptschnittes parallel sein muss; der andere optische Hauptschnitt wird natürlich dann senkrecht zur letzteren Richtung sein.

Bei rhombischen Ebenen ist jeder optische Hauptschnitt für alle Farben des Lichtes parallel der Trace eines krystallographischen Hauptschnittes.

Durch Platten begrenzt von trigonalen und hexagonalen Ebenen kann jedoch keine Doppelbrechung stattfinden, da sich zwei zu einander senkrechte Richtungen nicht mit der Symmetrie derselben vertragen. Das Gleiche gilt von tetragonalen Ebenen, da ja die beiden senkrechten optischen Hauptschnitte derselben Strahlensystemen angehören, die im Innern des Krystalles verschiedene Geschwindigkeit haben.

Bei tesseralen Krystallen kann jedoch, wie wir gesehen, nach keiner Richtung Doppelbrechung stattfinden, daher für jede Ebene solcher Krystalle die Frage nach deren Hauptschnitte wegfällt.

Für tetragonale und hexagonale Krystalle lässt sich aber auch für triklinische Ebenen die Lage der optischen Hauptschnitte bestimmen; letztere werden nämlich dem Vorhergehenden gemäss parallel und senkrecht sein zu einer Ebene, die durch die Normale der betrachteten triklinischen Ebene und die Axe der Aequatorialzone geht.

Die beiden Lichtstrahlen, die sich nach einer und derselben Richtung in einem Krystalle fortpflanzen, werden oft verschieden absorbirt; ein Phänomen, das man als Pleochroismus bezeichnet und das der Grund z. B. ist, warum Krystalle nach verschiedenen Richtungen verschieden gefärbt erscheinen. Für den Pleochroismus gilt nun ganz dasselbe wie für die Doppelbrechung Gesagte. Nach Richtungen, nach denen sich das Licht ungleich schnell fortpflanzt, wird auch die Absorption eine verschiedene sein, im entgegengesetzten Falle jedoch dieselbe. Bei Richtungen, nach denen keine Doppelbrechung stattfindet, kann natürlich auch nicht die Rede sein von der ungleichen Absorption der beiden Strahlenbündel. So viel ist jedenfalls klar, dass nach gleichwerthigen Richtungen die Färbung des Krystalles dieselbe sein muss. Diese Färbung setzt sich ja zusammen aus den Farben der zwei Strahlenbündel, die sich nach jenen Richtungen fortpflanzen. In tetragonalen und hexagonalen Krystallen wird natürlich die Färbung für jede Richtung senkrecht zur Axe der Aequatorialzone dieselbe sein müssen, für alle

diese Richtungen sind ja auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der beiden Lichtstrahlen konstant.

Von den optischen Erscheinungen sind noch die verschiedenen Arten des Glanzes zu erwähnen, der natürlich auch für gleichwerthige Flächen derselbe sein muss. Dasselbe gilt von dem Flächenschiller, den man bisweilen auf Krystallflächen bemerkt. Für denselben ist aber natürlich auch die Richtung, in der er wahrgenommen wird, und die Lage seiner Schwingungsebene (der Flächenschiller ist immer polarisirt) abhängig von der Symmetrie der Fläche, welche ihn zeigt.

Anmerkung. Unter den angeführten Eigenschaften der Krystalle lassen sich im Allgemeinen die optischen Verhältnisse derselben am leichtesten ermitteln, welche daher auch für das Studium der Krystalle von grösster Wichtigkeit sind. Hauptsächlich sind es die Richtungen der optischen Elastizitätsaxen im Inneren der Krystalle und die Lage der optischen Hauptschnitte auf den Flächen derselben, welche unter den optischen Verhältnissen die grössten Aufschlüsse über das System, die Bedeutung der Flächen etc. geben. Zur Ermittlung der Richtungen der optischen Elastizitätsaxen dient der Polarisationsapparat, welcher einen polarisirten Lichtkegel gibt; die Bestimmung der optischen Hauptschnitte einer Krystallplatte geschieht dagegen im parallelen Lichte: für sehr kleine Krystalle mittelst eines polarisirenden Mikroskopes, oder sonst mit Hilfe des von Fr. v. Kobell angegebenen Stauroskopes.

5. Kapitel.

Die Symmetrieverhältnisse des tesseralen Systems.

§. 36. Die gleichwerthigen Ebenen des holo- und hemitesseralen Systems.

Die Krystalle des tesseralen Systems haben, wie wir gesehen, neun Hauptschnitte, von welchen drei (U, V, W), die wir die hexaedrischen nennen wollen, wechselweise senkrecht auf einander stehen, während die übrigen sechs (P, P'....) die sechs Neigungswinkel der ersteren Hauptschnitte halbiren. Wir bezeichnen die letzten sechs Hauptschnitte als dodekaedrische, weil, wie wir schon wissen, die Anordnung derselben den Flächen des regulären Dodekaeders entspricht.

Wir beziehen die Krystalle des tesseralen Systems immer auf ein Axensystem, dessen Richtungen parallel den Durchschnitten der hexaedrischen Hauptschnitte sind, dessen Längen aber durch zwei der dodekaedrischen Hauptschnitte, die nicht auf einander senkrecht stehen, bestimmt werden. Die Elemente jedes tesseralen Krystalles sind somit

$$a = b = c = 1$$
$$\xi = \eta = \zeta = 90^0$$

und dieselben sind vollkommen gegeben. Das so bestimmte Axensystem ist, wie wir ebenfalls schon wissen, mit Bezug auf die hexaedrischen Hauptschnitte ein isoschematisches Axensystem der ersten Art, mit Bezug auf die dodekaedrischen aber eines der zweiten Art. Die Symbole der Hauptschnitte werden aber für dieses Axensystem

$$U\,(100),\quad V\,(010),\quad W\,(001)$$
$$P\,(011),\quad Q\,(101),\quad R\,(110)$$
$$P'(01\bar{1}),\quad Q'\,(\bar{1}01),\quad R'\,(\bar{1}10)$$

Da unter diesen Hauptschnitten solche drei vorkommen, von denen höchstens zwei auf einander senkrecht stehen, so folgt hieraus nach §. 23, dass tesserale Krystalle isoschematisch nach jeder ihrer Flächen sind. Natürlich ist in Folge dessen auch jede Zone solcher Krystalle isoschematisch mit Bezug auf jede ihrer Flächen. Von den verschiedenen Folgerungen, die sich hieraus ziehen lassen, wollen wir hier nur die erwähnen, dass die Kanten je zweier Flächen eines tesseralen Krystalles senkrecht sein müssen zu einer möglichen Fläche desselben. Jene zwei Flächen müssen nämlich nach §. 22 zu zwei möglichen Zonen senkrecht sein; die Fläche aber, welche in diesen beiden Zonen liegt, ist senkrecht zur Kante der ersteren zwei Flächen.

Fig. 97 gibt uns die gegenseitige Lage der Hauptzonenkreise auf der Sphäre der Projektion, also die Durchschnitte der Sphäre mit den durch ihren Mittelpunkt gelegten Hauptschnitten, welche letztere ja senkrecht zu möglichen Zonen sind. Als Ebene der Zeichnung ist hiebei der Hauptschnitt *W* gewählt, das Auge aber in den zu *W* senkrechten Radius der Sphäre versetzt gedacht. Diese Hauptzonen werden aber wechselweise auch die Pole der Hauptschnitte enthalten müssen, denn man überzeugt sich leicht, dass wirklich die Verbindungslinien jedes dieser Pole mit dem Mittelpunkte der Sphäre senkrecht stehen muss auf dem entsprechenden Hauptschnitte. Die gegenseitige Entfernung zweier Pole wie (100), (010) oder wie (100), (011) beträgt auf der Sphäre offenbar 90°, während Pole wie (100) und (011) um 45° von einander abstehen müssen. Berechnet man sich aus diesen Polen die Symbole eines Hauptzonenkreises, so findet man hiefür dieselben Zahlen, wie für das Symbol des Hauptschnittes, dessen Durchschnitt mit der Sphäre jenem Zonenkreise entspricht.

Je drei der dodekaedrischen Hauptschnitte wie *P'*, *Q'*, *R'* schneiden sich in Fig. 97 in einem und demselben Punkte. Dass diess wirklich der Fall sein muss, lässt sich schon leicht aus der Symmetrie der ganzen Figur erkennen, es ist aber auch der strenge Beweis hiefür leicht zu führen. Denn wie man aus ihren Symbolen erkennt, sind solche drei Hauptschnitte tautozonal und müssen sich daher, wenn man sie durch den Mittelpunkt der Projektionssphäre gehen lässt, in einem und demselben Radius des letzteren schneiden. Der Endpunkt dieses Radius auf der Sphäre wird aber der Pol einer möglichen Krystallfläche sein müssen, da derselbe ja der Durchschnitt von sogar drei möglichen Zonenkreisen ist. Aus den Symbolen dieser Zonenkreise findet man aber auch leicht, dass dieser Punkt der Pol der Fläche (111) sein muss.

Mit Rücksicht auf die zuletzt gemachte Bemerkung, dass je drei Hauptschnitte wie P', Q', R' sich in einem und demselben Punkte schneiden, ist es klar, dass die in Fig. 97 repräsentirte obere Hälfte der Projektionssphäre durch die Hauptschnitte in 24 Theile, sogenannte sphärische Dreiecke, getheilt wird.

Um nun zur Kenntnis der gleichwerthigen Richtungen und Ebenen für das betrachtete System zu gelangen, ist es nothwendig, die Ebenen aufzufinden, die mit einer beliebigen gegebenen Ebene einen nach allen Hauptschnitten isoschematischen einfachen Komplex bilden. Das hiebei einzuschlagende Verfahren ist in §. 27 angegeben; bei der wirklichen Ausführung dieses Verfahrens brauchen wir natürlich Ebenen, die sich von schon erhaltenen nur durch gerade entgegengesetzte Indices unterscheiden, nicht weiter zu berücksichtigen, dieselben sind ja einander parallel und geben somit keine neue Richtung.

Es seien h, k, l die Indices einer beliebigen Ebene; die mit dieser Ebene nach dem Hauptschnitte U isoschematische Ebene erhalten wir nach der gegebenen Regel durch Aenderung des Vorzeichens des ersten Index, da das zu Grunde gelegte Axensystem mit Bezug auf diesen Hauptschnitt ein isoschematisches der ersten Art ist. Wir haben somit jetzt die zwei Ebenen

$$hkl, \ \bar{h}kl$$

Das gleiche Verfahren auf den Hauptschnitt V angewendet, gibt die Ebenen

$$\text{(I)} \ \ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{matrix} hkl & h\bar{k}l \\ \bar{h}kl & \bar{h}\bar{k}l \end{matrix} \right.$$

Der Hauptschnitt W gibt jedoch keine neue verschiedene Ebene, im Einklange mit dem §. 21, wo wir gezeigt, dass, wenn ein Komplex von Ebenen isoschematisch ist mit Bezug auf eine gerade Anzahl tautozonaler Ebenen, die isoschematisch mit Bezug auf sich selbst sind, dieser Komplex auch isoschematisch nach der zu diesen tautozonalen Ebenen senkrechten Ebene ist.

Gehen wir nun zu dem Hauptschnitte R' über, mit Bezug auf welchen das angenommene Axensystem ein isoschematisches der zweiten Art ist, so erhalten wir durch Vertauschung des ersten und zweiten Index der früheren vier Ebenen nun im Ganzen die folgenden acht Ebenen

$$\text{(II)} \ \ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{matrix} hkl & \bar{h}kl & \bar{h}\bar{k}l & h\bar{k}l \\ khl & k\bar{h}l & \bar{k}\bar{h}l & \bar{k}hl \end{matrix} \right.$$

Der Hauptschnitt Q' gibt uns bei Fortsetzung des eingeleiteten Verfahrens die Ebenen

$$\begin{array}{llll} hkl & \bar{h}kl & \bar{h}\bar{k}l & h\bar{k}l \\ khl & k\bar{h}l & \bar{k}\bar{h}l & \bar{k}hl \\ lkh & lk\bar{h} & l\bar{k}\bar{h} & lk\bar{h} \\ lhk & l\bar{h}k & l\bar{h}\bar{k} & lh\bar{k} \end{array}$$

Durch den Hauptschnitt P' erhalten wir aber nur mehr acht neue Ebenen, welche mit den vorhergehenden das folgende Schema geben.

$$\left.\begin{array}{llll} hkl & \bar{h}kl & \bar{h}\bar{k}l & h\bar{k}l \\ hlk & \bar{h}lk & \bar{h}\bar{l}k & h\bar{l}k \\ klh & \bar{k}lh & \bar{k}\bar{l}h & k\bar{l}h \\ khl & \bar{k}hl & \bar{k}\bar{h}l & k\bar{h}l \\ lhk & \bar{l}hk & \bar{l}\bar{h}k & l\bar{h}k \\ lkh & \bar{l}kh & \bar{l}\bar{k}h & l\bar{k}h \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (III)$$

Hier können wir aber das Verfahren abbrechen, indem eine Fortsetzung desselben keine neuen Ebenen mehr zum Vorschein bringt, ebenfalls im Einklange mit dem schon zitirten §. 21. Es soll aber jetzt, wenigstens im Allgemeinen, die Lage der Pole für die so bestimmten Ebenen auf der Sphäre der Projektion angegeben werden. Da die Zeichen der Indices der Ebenen (III) so gewählt sind, dass sie sämmtlich zu einer Seite des Hauptschnittes W liegen, so werden ihre Pole auch sämmtlich in die Fig. 97 entfallen, und zwar wird, da der Ebenen 24 sind, jedes der 24 sphärischen Dreiecke dieser Figur einen der Pole enthalten müssen. Was für eines dieser Dreiecke gilt, muss ja offenbar auch für die anderen gelten.

Es ist aber auch nicht schwer, für jedes der 24 sphärischen Dreiecke anzugeben, welchen der Pole der Ebenen (III) dasselbe enthalten wird. Wir bemerken zuerst, dass durch die hexaedrischen Hauptschnitte U, V, W die Halbsphäre in vier Theile getheilt wird, welche offenbar den verschiedenen Oktanten entsprechen. Für jeden dieser vier Theile werden daher die Indices der darin vorkommenden Pole verschiedene Vorzeichen, für einen und denselben Theil aber immer dieselben Zeichen haben müssen. In dem Schema (III) sind nun die 24 Ebenen ersichtlich schon so geordnet, dass die unter einander stehenden immer in einem und demselben Oktanten liegen; zugleich sieht man, dass, abgesehen von den Zeichen der Indices, die verschiedenen Oktanten sich nicht von einander unterscheiden; die relative Lage der sechs Ebenen wird daher, wie schon von vornherein klar ist, in jedem Oktanten dieselbe sein, und es genügt also, die Lage derselben bloss für einen

Oktanten zu bestimmen. Wir wählen hiezu den durch die Pole (100), (010), (001) gegebenen Oktanten, in welchem offenbar nur Ebenen mit lauter positiven Indices liegen können, und betrachten in demselben das durch die Pole (111), (110), (100) gebildete sphärische Dreieck. Der Pol einer Ebene E $(i_1 i_2 i_3)$ mit lauter positiven Indices wird aber offenbar in diesem Dreiecke liegen oder nicht, je nachdem derselbe den folgenden zwei Bedingungen genügt oder nicht. Diese Bedingungen sind: Der Pol der Ebene E muss

erstens auf derselben Seite des Zonenkreises P' $(01\bar{1})$ liegen wie die Pole der Flächen (110), (010).... und

zweitens auf derselben Seite des Zonenkreises R' $(\bar{1}10)$ wie die Pole (100), (101)....

Hiebei ist jedoch nicht ausgeschlossen, dass der Pol in einen dieser Zonenkreise fällt, ohne dadurch aufzuhören, ein Punkt des betrachteten Dreieckes zu sein. Die angeführten Bedingungen geben uns daher mit Berücksichtigung der letzten Bemerkung nach §. 14 für die Indices der Ebene E die Relationen

$$i_2 - i_3 \geqq 0$$
$$-i_1 + i_2 \leqq 0$$

von deren Erfüllung es abhängt, ob der Pol dieser Ebene in dem Dreiecke (111) (100) (110) liegt oder nicht. Diese zwei Bedingungen lassen sich aber offenbar in die eine

$$i_1 \geqq i_2 \geqq i_3$$

zusammenfassen, von welchem Resultate man sich aber auch leicht durch direkte geometrische Anschauung überzeugen kann.

Da wir nun in den nachfolgenden Untersuchungen immer

$$h > k > l$$

voraussetzen, so wird in das betrachtete Dreieck der Pol der Ebene (hkl) entfallen müssen, da nur die Indices dieser Ebene die angegebene Bedingung erfüllen. Aehnliche Betrachtungen könnte man auch für die übrigen Dreiecke dieses Oktanten anstellen; so hat man z. B. für eine Ebene $(i_1\ i_2\ i_3)$ im Dreiecke (001) (011) (111) die Bedingung, dass

$$i_1 < i_2 < i_3$$

In dieses Dreieck wird daher zu Folge der zwischen h, k, l angenommenen Relation der Pol der Ebene (lkh) entfallen müssen. Es wird auf diese Weise auch unsere Behauptung bestätigt, dass wirklich in jedes der 24 sphärischen Dreiecke der Pol einer Ebene entfällt.

Allein es genügt schon, dass man nur für eines der sechs Dreiecke das Symbol derjenigen Ebene (III) kennt, deren Pol in dieses Dreieck entfällt, um auch für die übrigen Dreiecke desselben Oktanten die Symbole der entsprechenden Ebenen sogleich anzugeben.

Die zwei der Ebenen (III) z. B., deren Pole in die beiden Dreiecke (100) (110) (111) und (100) (101) (111) entfallen, werden sich offenbar gleich gegen die Fläche (100) verhalten; mit Bezug auf die Flächen (010) und (001) wird aber ihre Lage gerade entgegengesetzt sein. In den Symbolen dieser zwei Ebenen, deren Indices nach dem Schema (III) sich nur durch ihre Ordnung unterscheiden können, wird daher der auf die *X* Axe bezügliche Index derselbe sein, während die anderen zwei in den beiden Symbolen mit einander vertauscht sind. Liegt daher die Ebene (hkl) in dem Dreiecke (100) (110) (111), so wird in das Dreieck (100) (101) (111) der Pol der Ebene (hlk) entfallen müssen. Ganz ähnlich wird man bei Vergleichung der Dreiecke (100) (101) (111) und (001) (101) (111), welche sich gleich gegen die *Y* Axe verhalten finden, dass in dem letzteren Dreiecke der Pol der Ebene (klh) liegen wird. Ueberhaupt gilt dieselbe Betrachtung für je zwei benachbarte Dreiecke desselben Oktanten.

Zwei sphärische Dreiecke jedoch, welche in verschiedenen Oktanten liegen, aber eine Seite gemeinschaftlich haben, werden dieselbe Lage gegen die Halbaxen des betreffenden Oktanten haben und sich nur durch die Richtung einer dieser Halbaxen unterscheiden. Die Pole von zwei der Ebenen (III), die in solchen Dreiecken liegen, werden sich daher auch nur durch das Vorzeichen eines ihrer Indices unterscheiden können. So enthalten die Dreiecke (100) (111) (110) und (100) $(1\bar{1}0)$ $(1\bar{1}1)$ die Pole der Ebenen (hkl) und $(h\bar{k}l)$. Es ist diess im Einklange mit den früheren Bemerkungen über solche Dreiecke, welche in verschiedenen Oktanten dieselbe relative Lage haben.

Durch das Gesagte wird die in Fig. 97 gegebene relative Anordnung der Pole der Ebenen (III) vollkommen gerechtfertigt; wie man jedoch die exakte Lage dieser Pole auf der Projektionssphäre finden kann, werden wir erst in einem späteren Kapitel kennen lernen. Hier wollen wir nur noch Einiges über den gegenseitigen Abstand dieser Pole besprechen.

Die sechs Ebenen des Oktanten (100) (010) (001) werden alle von dem Pole (111) gleich weit abstehen, wie man aus der Symmetrie der ganzen Figur leicht erkennt, wie aber auch aus dem im §. 21 Bewiesenen strenge hervorgeht. Ebenso ist klar, dass die Winkel zwischen

je zwei benachbarten dieser sechs Pole nur zweierlei Werthe haben können, die mit einander abwechseln; es wird also

$$F = (hkl)\,(khl) = (lhk)\,(lkh) = (klh)\,(hlk)$$
$$G = (hkl)\,(hlk) = (lhk)\,(khl) = (klh)\,(lkh)$$

sein. Dasselbe gilt natürlich auch für die übrigen Oktanten, in denen sich auch die Winkel F und G wiederholen. Es gilt aber Aehnliches auch von Polen, in denen sich eine andere Anzahl von Hauptschnitten kreuzen, wie (100), (010), (001) oder wie (110), (101)...., von welchen Polen beziehungsweise immer acht oder vier der Ebenen (III) gleich weit abstehen müssen. Der Pol (001) gibt uns die Gleichung

$$D = (lkh)\,(\bar{l}kh) = (\bar{k}lh)\,(\bar{k}\bar{l}h)$$
$$= (\bar{l}kh)\,(lkh) = (k\bar{l}h)\,(klh)$$

welche mit den früheren zwei Gleichungen hinreicht, um erkennen zu lassen, dass die Winkel zwischen zwei benachbarten der Ebenen (III) nur dreierlei verschiedene Werthe haben können.

Für den Fall der Holosymmetrie nun sind dem zweiten Hauptgesetze zufolge Ebenen, deren Anordnung durch das Schema (III) repräsentirt ist, gleichwerthig, sowie auch Richtungen senkrecht zu solchen Ebenen ebenfalls gleichwerthige sind. Sämmtliche Hauptschnitte sind in diesem Falle Ebenen der Symmetrie; es ist aber leicht zu beweisen, dass dann sowohl die hexaedrischen als die dodekaedrischen Hauptschnitte unter sich gleichwerthig sein müssen. Setzt man nämlich in dem Schema (III), welches uns die gleichwerthigen Ebenen repräsentirt, für h, k, l einmal die Werthe 1, 0, 0, das anderemal aber die Werthe 1, 1, 0, so reduziren sich die Ebenen (III) im ersten Falle auf die hexaedrischen, im zweiten Falle auf die dodekaedrischen Hauptschnitte.

Im Falle der Hemisymmetrie sind aber, wie wir wissen, nur je eine Hälfte der durch das Schema (III) gegebenen Ebenen und Richtungen wirklich gleichwerthig. Diese halbe Anzahl der Ebenen (III) muss aber so beschaffen sein, dass ihre Anordnung mit Bezug auf Hauptschnitte, die für den Fall der Holosymmetrie gleichwerthig sind, dieselbe ist. Sollen nun von den 24 Ebenen (III) zwölf ausgewählt werden, die dieser Bedingung genügen, so können diess nur die folgenden Ebenen sein:

$$\text{(IV)} \; \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{llll} hkl & \bar{h}kl & \bar{h}\bar{k}l & h\bar{k}l \\ klh & \bar{k}lh & \bar{k}\bar{l}h & k\bar{l}h \\ lhk & \bar{l}hk & \bar{l}\bar{h}k & l\bar{h}k \end{array} \right.$$

Natürlich genügen dann auch die ausgelassenen der Ebenen (III) der angegebenen Bedingung, diese Ebenen sind ja auch durch das vorhergehende Schema gegeben, wovon man sich leicht überzeugt, wenn man statt der beliebigen Ebene (hkl) die Ebene (hlk) wählt, d. h. die Indices k und l vertauscht.

Dass aber wirklich nur auf diese eine Art zwölf der Ebenen (III) gewählt werden können, welche den Bedingungen der Hemisymmetrie entsprechen, davon überzeugt man sich einfach durch Betrachtung derjenigen Pole in Fig. 97, welche Durchschnittspunkte gleichwerthiger Hauptschnitte sind. Es müssen nämlich offenbar von den sechs Ebenen (III), welche in demselben Oktanten wie der Pol (111) liegen, entweder alle oder nur die abwechselnden oder aber gar keine gleichwerthig bleiben, soll die Anordnung der gleichwerthigen Ebenen dieselbe sein für jeden der drei im Punkte (III) sich kreuzenden gleichwerthigen Hauptschnitte. Dasselbe gilt von den übrigen Polen (111). Ebenso werden die acht dem Pole (001) zunächst liegenden Ebenen entweder alle oder nur die Hälfte oder gar keine gleichwerthig bleiben müssen. Im Falle nur die Hälfte gleichwerthig bleibt, können im Allgemeinen entweder Ebenen wie (klh), (lkh), $\bar{k}\bar{l}h)$, $(\bar{l}\bar{k}h)$ oder aber die abwechselnden gleichwerthig bleiben.

Diesen Bedingungen für die den Polen (001), (111), $(\bar{1}11)$.... zunächst liegenden gleichwerthigen Ebenen wird aber nur durch das Schema (IV) genügt, wie man findet, wenn man wirklich die einzelnen der angeführten möglichen Fälle für den Pol (001) mit denen für die Pole (111), $(\bar{1}11)$.... kombinirt.

Es gibt also ein einziges hemitesserales System; die Lage der gleichwerthigen Ebenen und Richtungen desselben ist gegeben durch das Schema (IV). Die Ebenen dieses Schema bilden einen Komplex, der isoschematisch ist nach den hexaedrischen Hauptschnitten, und zwar bilden sie einen dreizähligen Komplex. Das Schema (I) gibt uns nämlich einen nach den hexaedrischen Hauptschnitten isoschematischen einfachen Komplex; indem man nun in diesem Schema (I) als Ausgangsebene der Reihe nach (hkl), (klh), (lhk) wählt, erhält man sämmtliche Ebenen (IV).

Man ersieht hieraus auch, dass die Anordnung der Ebenen (IV) nicht der Symmetrie eines andern Systems entspricht, in welchem wir zwar auch Hauptschnitte wie die hexaedrischen des tesseralen Systems antreffen, mit Bezug auf welche Hauptschnitte in jenen Systemen die gleichwerthigen Richtungen aber höchstens einen zweizähligen Komplex bilden, wie wir diess bei den betreffenden Systemen sehen werden. Wäre

diess letztere nicht der Fall, so könnten, wie im §. 36 bewiesen wurde, durch die Ebenen (IV) eine Hemisymmetrie des tesseralen Systems nicht repräsentirt werden.

Aus dem Gesagten erhellt, dass die hexaedrischen Hauptschnitte auch noch für den Fall der Hemisymmetrie Ebenen der Symmetrie bleiben, während diess für die dodekaedrischen Hauptschnitte nicht mehr stattfindet. Auch überzeugt man sich leicht mit Hilfe des Schema (IV), dass wirklich sowohl die hexaedrischen, wie die dodekaedrischen Hauptschnitte auch für den Fall der Hemisymmetrie unter sich gleichwerthig sind.

Schema (III) und (IV) geben uns für das holo- und hemitesserale System Zahl und Anordnung der gleichwerthigen Ebenen, und zwar repräsentiren sie den allgemeinsten Fall, da wir ja über die Lage der Ebene (hkl) keinerlei beschränkende Annahme gemacht haben. Es sind aber auch spezielle Fälle gleichwerthiger Ebenen möglich, welche dadurch entstehen, dass die Ebene, von der wir ausgegangen sind, senkrecht wird zu einem oder mehreren der Hauptschnitte, ihr Pol also in einen oder mehrere der Hauptzonenkreise fällt. Findet diess nämlich für eine der Ebenen (III) statt, so wird diess offenbar auch für die übrigen dieser Ebenen gelten müssen. Wenn wir nun bei Betrachtung dieser speziellen Fälle als Ausgangsebene diejenige (hkl) wählen, deren Pol in das Dreieck (100) (110) (111) entfällt, so machen wir hiebei heine beschränkende Annahme, indem unter den Ebenen (III) immer eine solche vorhanden sein wird. Der Pol der Ebene (hkl) kann nun in dem angegebenen Dreiecke folgende sieben Lagen haben. Derselbe fällt nämlich entweder

1. in keinen der Hauptzonenkreise, was der schon betrachtete allgemeine Fall ist;

2. in den Hauptzonenkreis P' $[0\bar{1}1]$, für welchen Fall

$$k = l$$

d. h. die beiden kleineren Indices einander gleich sein müssen und die Ebenen (III) sich auf 12 reduziren;

3. in den Hauptzonenkreis R' $[1\bar{1}0]$, wodurch

$$h = k$$

also die beiden grösseren Indices einander gleich werden und die Ebenen (III) sich wieder auf 12 reduziren;

4. in den Zonenkreis W $[001]$, demzufolge

$$l = o$$

wird und das Schema (III) nur 12 wesentlich von einander verschiedene Ebenen repräsentirt;

5. in die beiden Hauptzonenkreise R' $[1\bar{1}0]$ und $W[001]$, alsdann muss

$$h = k, \; l = o$$

sein, die durch das Schema (III) repräsentirten Ebenen aber sind die dodekaedrischen Hauptschnitte;

6. in die beiden Hauptzonenkreise P' $[0\bar{1}1]$ und R $[1\bar{1}0]$, wodurch

$$h = k = l$$

wird, und die Ebenen [III] in die vier Ebenen (111), $(\bar{1}11)$, $(\bar{1}\bar{1}1)$, $(1\bar{1}1)$ übergehen:

7. endlich in die beiden Zonenkreise $P'[0\bar{1}1]$ und $W[001]$, in welchem Falle

$$k = l = o$$

und das Schema (III) die hexaedrischen Hauptschnitte repräsentirt.

Wir hätten nun noch näher zu untersuchen, welches die wechselseitige Lage der gleichwerthigen Ebenen in diesen speziellen Fällen ist, und besonders diess auch für den Fall der Hemisymmetrie festzustellen. Allein diess wird durch die nachfolgende Betrachtung der holo- und hemitesseralen Formen überflüssig gemacht, indem sich aus denselben die Lage der gleichwerthigen Ebenen für jeden der angeführten speziellen Fälle erkennen lässt. Freilich setzen wir, insoferne wir von einer Form sprechen, voraus, dass die Indices ihrer Flächen rational sind, allein für einige der speziellen Fälle, in welchen die Indices vollkommen bestimmt sind, sind sie ohnedem auch rational, und für die anderen Fälle wird natürlich auch die Anordnung gleichwerthiger Ebenen eine ähnliche sein, sei es, dass ihre Indices rational sind oder nicht.

§. 37. Holotesserale Formen, A. Holoeder.

Wie wir im Vorhergehenden gesehen, sind für das holotesserale System die gleichwerthigen Richtungen und Ebenen durch das Schema (III) gegeben. In diesem Falle sind alle Hauptschnitte Ebenen der Symmetrie, daher auch alle Hauptaxen holosymmetrischen Charakter besitzen. Fragen wir nach der Anzahl dieser Hauptaxen im holotesseralen Systeme, so haben wir bekanntlich jene Richtungen aufzusuchen, die parallel wenigstens zu zwei Hauptschnitten sind, deren Endpunkte auf der Sphäre der Projektion, also wenigstens in zwei Hauptzonenkreisen liegen. Solcher Punkte gibt es aber, wie Fig. 97 lehrt, nur 13, da solche, die gerade gegenüber liegen, nur als eins zu zählen sind. Drei dieser Punkte (100), (010), (001) sind die Durchschnitte von vier Hauptzonenkreisen, vier derselben (111), $(\bar{1}11)$... die Durch-

schnitte von drei, die übrigen sechs Punkte (011), (101).... aber bloss von je zwei Hauptzonenkreisen. Jeder holotesserale Krystall, sei derselbe eine Form oder eine Kombination, wird daher ein System von 13 Hauptaxen aufweisen müssen, von welchen 3 tetragonal, 4 trigonal, 6 aber rhombisch sind. Die tetragonalen Hauptaxen fallen mit den Axenrichtungen zusammen und stehen also wechselweise auf einander senkrecht, ihre Winkel werden durch die rhombischen Axen halbirt, während die trigonalen gleiche Winkel mit je drei der tetragonalen Halbaxen bilden.

Sind die durch das Schema (III) gegebenen Ebenen mögliche Krystallflächen, also h, k, l drei rationale Grössen, so wissen wir, dass, wenn diese Flächen wirklich an einem Krystalle auftreten, entweder zu jeder der durch ihre Normalen bestimmten, gleichwerthigen Richtungen zwei senkrechte Flächen an den verschiedenen Hälften der Richtungen vorkommen, oder zu jeder Richtung nur eine einzige senkrechte Fläche vorhanden ist. Der erste Fall ist der der Holoedrie, welche wir in diesem Paragraphe betrachten wollen; bei derselben müssen also ausser den durch das Schema (III) gegebenen Flächen auch noch die ihnen gerade entgegengesetzten gleichzeitig auftreten. Die letzteren Flächen erhält man leicht, indem man bloss die Vorzeichen der Indices der esteren Flächen in die entgegengesetzten ändert. Man erhält so im Ganzen die folgenden 48 Flächen:

$$
\text{(V)} \quad \ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{cccc}
hkl & \bar{h}kl & \bar{h}\bar{k}l & h\bar{k}l \\
hlk & \bar{h}lk & \bar{h}\bar{l}k & hlk \\
klh & \bar{k}lh & \bar{k}\bar{l}h & k\bar{l}h \\
khl & \bar{k}hl & \bar{k}\bar{h}l & k\bar{h}l \\
lhk & \bar{l}hk & \bar{l}\bar{h}k & l\bar{h}k \\
lkh & \bar{l}kh & \bar{l}\bar{k}h & l\bar{k}h \\
\bar{h}\bar{k}\bar{l} & h\bar{k}\bar{l} & hk\bar{l} & \bar{h}k\bar{l} \\
\bar{h}\bar{l}\bar{k} & h\bar{l}\bar{k} & hl\bar{k} & \bar{h}l\bar{k} \\
\bar{k}\bar{l}\bar{h} & k\bar{l}\bar{h} & kl\bar{h} & \bar{k}l\bar{h} \\
\bar{k}\bar{h}\bar{l} & k\bar{h}\bar{l} & kh\bar{l} & \bar{k}h\bar{l} \\
\bar{l}\bar{h}\bar{k} & l\bar{h}\bar{k} & lh\bar{k} & \bar{l}h\bar{k} \\
\bar{l}\bar{k}\bar{h} & l\bar{k}\bar{h} & lk\bar{h} & \bar{l}k\bar{h}
\end{array} \right.
$$

Diese Flächen geben uns den allgemeinsten Fall eines holotesseralen Holoeders. Führt man in den Symbolen des vorstehenden Schema die im vorhergehenden Paragraphe angegebenen Spezialisirungen der Indices h, k, l aus, wodurch ja der Bedingung, dass die Indices rational sind, nicht widersprochen wird, so erhält man Formen, welche spezielle Fälle der allgemeinen Form darstellen.

Die Flächen jeder Form denken wir uns im Gleichgewichte, d. h. gleich weit von dem Axenmittelpunkte abstehend. Welches dann im Allgemeinen der Weg ist, um eine Zeichnung einer solchen Form anzufertigen, ersieht man aus dem §. 3, welcher die Durchschnittslinien zweier beliebigen Ebenen finden lehrt. Die Zeichnung einfacher und mehrzähliger Krystallgestalten soll jedoch noch ausführlich in einem der folgenden Kapitel behandelt werden.

Obwohl der Abstand gleichwerthiger Flächen vom Mittelpunkte des Krystalles in der Natur oft sehr verschieden ist, dürfte es doch zweckmässig sein, sich die geometrische Gestalt der Formen für den Fall des Gleichgewichtes dem Gedächtnisse einzuprägen.

Wir wollen daher auch die geometrischen Verhältnisse dieser Formen etwas ausführlicher betrachten. Die Ecken derselben sind natürlich immer einfache, da ja die Flächen einer und derselben Form alle gleichwerthig sind. In Fig. 97 ist die Lage der Pole auch für die Flächen der speziellen Formen bemerkt.

1. Das Hexakisoktaeder $\{hkl\}$, Fig. 98, als allgemeinste Form. Die 48 Flächen desselben sind gegeben durch das Schema (V); sie sind triklinisch, da sie zu keinem der Hauptschnitte senkrecht sind, ihr Umriss ist ein ungleichseitiges Dreieck. Unter den 26 Ecken, welche von diesen Flächen gebildet werden, sind 6 achtflächige tetragonale, 8 sechsflächige trigonale und 12 vierflächige rhombische Ecken; durch diese Ecken gehen die gleichnamigen Hauptaxen hindurch, letztere natürlich durch den Mittelpunkt der Gestalt gelegt. Kennt man die Länge dieser Hauptaxen, d. h. die Entfernung des Mittelpunktes von den entsprechenden Ecken, so ist ersichtlich der Umriss der ganzen Gestalt, d. h. ihre Kanten durch diese Längen bestimmt, eine Bemerkung, die sich zur Zeichnung dieser und der folgenden Formen anwenden lässt. Da die Ecken alle einfache sind, so müssen mit Bezug auf ihre Seitenanzahl immer nur die abwechselnden Kanten derselben gleichwerthig sein. Hiedurch überzeugt man sich, dass von den 72 Kanten dieser Gestalt je 24 gleichwerthig und also auch gleich gross sind. Wir unterscheiden demzufolge zwischen Kanten, wie F und G, welche in den dodekaedrischen Hauptschnitten und Kanten wie D, welche in den hexaedrischen Hauptschnitten liegen. Da, wie wir wissen, in dem tesseralen Systeme jede Kante senkrecht zu einer möglichen Fläche ist, so müssen offenbar die gleichwerthigen Kanten die Normalen der Flächen tesseraler Formen sein. Es ist leicht einzusehen, dass die Kanten F senkrecht sind zu den Flächen eines Ikositetraeders, die Kanten D senkrecht zu denen eines Triakisoktaeders, die Kanten

D endlich senkrecht zu den Flächen eines Tetrakishexaeders sind. Dadurch, dass man den Indices *h*, *k*, *l* verschiedene Werthe ertheilt, erhält man natürlich im Allgemeinen eine unbegrenzte Anzahl verschiedener Varietäten von Hexakisoktaeder, die sich durch ihre geometrische Abmessungen von einander unterscheiden. Dieselbe Bemerkung gilt überhaupt für jede Form, deren Indices durch die Spezialisirung nicht vollkommen bestimmt sind.

2. Das Ikositetraeder $\{hkk\}$, Fig. 99, für dessen Flächen die zwei kleineren Indices gleich sind, und das aus dem Hexakisoktaeder dadurch entsteht, dass die Grösse der Kanten *G* gleich 180° wird. Diese Gestalt ist begrenzt von 24 Deltoiden, die senkrecht zu je einem dodekaedrischen Hauptschnitte sind und daher zu den monoklinischen Flächen gehören. Die Pole dieser Flächen müssen nämlich immer in die dodekaedrischen Hauptzonenkreise fallen, wie diess aus ihren Indices hervorgeht. Die Hauptaxen gehen alle durch die Ecken, deren es 26 gibt, und zwar 6 tetragonale vierflächige, 8 trigonale dreiflächige und 12 rhombische ebenfalls vierflächige. Wie die Ecken lehren, sind von den 48 Kanten je 24 gleichwerthig, von denen die einen (*D*) in den hemiedrischen, die anderen (*F*) in den dodekaedrischen Hauptschnitten liegen.

3. Das Triakisoktaeder $\{hhl\}$, Fig. 100, welches aus dem Hexakisoktaeder durch Verschwinden der Kanten *F* entsteht, wodurch die zwei grösseren Indices einander gleich werden, und je zwei Flächen in eine Fläche übergehen, deren Pol dann nothwendigerweise in einem der dodekaedrischen Hauptschnitte liegt. Diese Form ist also begrenzt von 24 monoklinischen gleichschenkligen Dreiecken. Die 14 Ecken zerfallen in 6 achtflächige tetragonale und in 8 dreiflächige trigonale; durch diese Ecken gehen die gleichnamigen Hauptaxen. Die rhombischen Hauptaxen gehen durch die Mittelpunkte von 12 gleichwerthigen Kanten (*D*), welche in den hexaedrischen Hauptschnitten liegen; die übrigen 24 (*G*) sind ebenfalls unter sich gleichwerthig und liegen in den dodekaedrischen Hauptschnitten.

4. Das Tetrakishexaeder $\{hko\}$, Fig. 101. Verschwinden in dem Hexakisoktaeder die Kanten *D*, so reduziren sich die Flächen desselben auf 24, die senkrecht zu den hexaedrischen Hauptschnitten sind. Diese Form ist also von 24 monoklinischen gleichschenkligen Dreiecken begrenzt, welche 14 Ecken bilden. Von diesen sind 6 vierflächige tetragonale, 8 aber sechsflächige trigonale; durch diese Ecken gehen die gleichnamigen Axen, während die rhombischen Axen durch die Mittelpunkte von 12 gleichwerthigen Kanten (*F*) gehen, die parallel

den Axenrichtungen sind. Die übrigen 24 Kanten (*G*) sind ebenfalls unter sich gleichwerthig und liegen in den dodekaedrischen Hauptschnitten.

5. Das Dodekaeder {110}, Fig. 102, entsteht aus der allgemeinen Form {*hkl*} durch Verschwinden der rhombischen Ecken. Die 12 Flächen dieser Form, welche dem Dodekaeder der Geometrie entspricht, sind natürlich parallel den dodekaedrischen Hauptschnitten und sind, da jede von ihnen senkrecht zu einem hexaedrischen und einem dodekaedrischen Hauptschnitte ist, rhombische Flächen. Der Umriss dieser Flächen ist ein Rhombus mit Winkeln von 60° und 120°, wie sich mit Hilfe elementarer Geometrie beweisen lässt, durch ihre Mittelpunkte gehen aber die rhombischen Hauptaxen. Die tetragonalen und trigonalen Hauptaxen gehen durch die 14 Ecken, unter welchen 6 vierflächige tetragonale und 8 dreiflächige trigonale sind. Die 24 Kanten (*G*) sind alle gleichwerthig und liegen in den dodekaedrischen Hauptschnitten. Von dieser Form sind natürlich, sowie für die zwei folgenden keine verschiedenen Varietäten möglich.

6. Das Oktaeder {111}, Fig. 103, in welches das Hexakisoktaeder durch Verschwinden der trigonalen Ecken übergeht. Diese Form stimmt mit dem Oktaeder der Geometrie überein; es ist begrenzt von 8 gleichseitigen Dreiecken, welche trigonale Ebenen sind, da sie senkrecht stehen auf je drei der dodekaedrischen Hauptschnitte. Die 6 Ecken sind vierflächige tetragonale, sowie auch die 12 Kanten (*D*) alle gleichwerthig sind; letztere liegen in den hexaedrischen Hauptschnitten und sind senkrecht zu den Flächen des Dodekaeders. Die tetragonalen Hauptaxen gehen durch die Ecken, die trigonalen durch die Mittelpunkte der Flächen, die rhombischen endlich durch die Mittelpunkte der Kanten.

7. Das Hexaeder {100}, Fig. 104 endlich entsteht aus der allgemeinen Form {*hkl*} durch Verschwinden der tetragonalen Ecken. Das Hexaeder, welches dem der Geometrie entspricht, ist begrenzt von 6 Quadraten, welche tetragonale Flächen und parallel den Axenebenen sind. Der Ecken sind 8 gleichwerthige trigonale, der Kanten aber 12 gleichwerthige (*F*), welche parallel den Axenrichtungen sind. Von den Hauptaxen gehen die tetragonalen durch die Mittelpunkte der Flächen, die trigonalen durch die Ecken, die rhombischen aber durch die Mittelpunkte der Kanten.

§. 38. Holotesserale Formen B. Hemieder.

Im Falle der Hemiedrie wird die allgemeinste tesserale Form nur durch je solche 24 Flächen des Hexakisoktaeder gebildet, unter welchen keine parallelen sind und wo die Anordnung für gleichwerthige Hauptschnitte dieselbe ist. Solche 24 Flächen des Hexakisoktaeders können aber, wie man sich mit Hilfe der Fig. 97 überzeugt, nur auf folgende zwei Arten angeordnet sein. Entweder sie entsprechen den durch das folgende Schema gegebenen Flächen

$$
(\mathrm{VI}) \;\ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{llll}
hkl & \bar{h}lk & \bar{h}\bar{k}l & h\bar{l}k \\
klh & \bar{k}hl & \bar{k}\bar{l}h & k\bar{h}l \\
lhk & \bar{l}kh & \bar{l}\bar{h}k & l\bar{k}h \\
\bar{h}\bar{l}\bar{k} & h\bar{k}\bar{l} & hl\bar{k} & \bar{h}k\bar{l} \\
\bar{k}\bar{h}\bar{l} & k\bar{l}\bar{h} & kh\bar{l} & \bar{k}l\bar{h} \\
\bar{l}\bar{k}\bar{h} & l\bar{k}\bar{h} & lk\bar{h} & \bar{l}k\bar{h}
\end{array} \right.
$$

unter welchen ersichtlich keine parallelen sind, oder aber es sind die Flächen abwechselnder Oktanten, nämlich Flächen wie

$$
(\mathrm{VII}) \;\ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{llll}
hkl & \bar{h}\bar{k}l & h\bar{k}\bar{l} & \bar{h}k\bar{l} \\
hlk & \bar{h}\bar{l}k & h\bar{l}\bar{k} & \bar{h}l\bar{k} \\
klh & \bar{k}\bar{l}h & k\bar{l}\bar{h} & \bar{k}l\bar{h} \\
khl & \bar{k}\bar{h}l & k\bar{h}\bar{l} & \bar{k}h\bar{l} \\
lhk & \bar{l}\bar{h}k & l\bar{h}\bar{k} & \bar{l}h\bar{k} \\
lkh & \bar{l}\bar{k}h & l\bar{k}\bar{h} & \bar{l}k\bar{h}
\end{array} \right.
$$

Die Flächen (VI) geben ein von 24 Fünfecken begrenztes Pentagonikositetraeder, welcher mit seiner korrelaten Form enantiomorph (siehe §. 29) ist. Da dasselbe aber bis jetzt noch nicht in der Natur beobachtet wurde, so wollen wir auch diese Art der Hemiedrie nicht weiter berücksichtigen.

Gehen wir zur Betrachtung der durch die Flächen (VII) gebildeten Form über, so bemerken wir, dass die 24 übrigen Flächen des Hexakisoktaeders eine ganz ähnliche Form werden geben müssen. Diese beiden Formen sind nach der Definition des §. 29 korrelate; dieselben unterscheiden sich nur durch ihre Stellung, denn dreht man eine derselben um eine der Axenrichtungen um 90^0, so werden die beiden Formen vollkommen identisch. Die Flächen derselben liegen nämlich für jede Form in verschiedenen Oktanten, in welchen sie aber dieselbe relative Lage haben. Durch die angegebene Drehung fallen nun die abwechselnden Oktanten beider Gestalten und somit auch die Flächen dieser Oktanten zusammen.

Indem wir in der allgemeinen Form. die Indices h, k, l wie im Falle der Holoedrie spezialisiren, erhalten wir auch die speziellen hemiedrischen Formen. Einige derselben stimmen aber in ihren geometrischen Verhältnissen vollkommen mit den gleich bezeichneten Holoedern überein. Solche Formen werden überhaupt mit den letzteren identisch sein, da sie sich ja auch durch die physikalischen Eigenschaften nicht unterscheiden können.

Indem wir also Formen, die wir schon im Falle der Holoedrie kennen gelernt haben, nicht weiter berücksichtigen, erhalten wir nur folgende vier holotesserale Hemieder.

8. Das Hexakistetraeder $\varkappa\{hkl\}$, Fig. 105, oder $\varkappa\{\bar{h}kl\}$ als allgemeinste Form. Dieselbe ist begrenzt von 24 ungleichseitigen Dreiecken mit triklinischem Charakter, welche 14 Ecken bilden, von denen 6 vierflächige trigonale und 8 sechsflächige trigonale sind. Die letzteren Ecken sind zweierlei Art, indem die eine Hälfte derselben näher dem Mittelpunkte liegt als die andere. Durch je zwei solche ungleiche trigonale Ecken geht eine trigonale Hauptaxe, ebenso gehen die rhombischen Hauptaxen durch die gleichnamigen Ecken. Durch die Untersuchung der Ecken überzeugt man sich, dass die 36 Kanten, welche sämmtlich in den dodekaedrischen Hauptschnitten liegen, in drei Gruppen von je 12 gleichwerthigen Kanten zerfallen. Hievon sind die Kanten F senkrecht zu den Flächen eines Deltoiddodekaeders, die Kanten G und E aber senkrecht zu den Flächen zweier Triakistetraeder.

9. Das Trigondodekaeder $\varkappa\{hkk\}$, Fig. 106, oder $\varkappa\{\bar{h}kk\}$ als Hemiedrie des Ikositetraeder. Diese Form entsteht aus $\varkappa\{hkl\}$ durch Verschwinden der Kanten G, wodurch je zwei der Flächen zusammenfallen müssen. Diese Form ist umschlossen von 12 gleichschenkligen monoklinischen Dreiecken, welche 8 trigonale Ecken zweierlei Art bilden, je nachdem sie entweder dreiflächig oder sechsflächig sind. Die 18 Kanten liegen sämmtlich in den dodekaedrischen Hauptschnitten; sie sind zu 12 und 6 unter sich gleichwerthig. Die letzteren sechs Kanten (E) sind auch parallel den hexaedrischen Hauptschnitten, sie entsprechen den Kanten der Tetraeder; durch ihre Mittelpunkte gehen die tetragonalen Hauptaxen, während die trigonalen durch je zwei ungleichartige trigonale Ecken gehen.

10. Das Triakistetraeder $\varkappa\{hhl\}$, Fig. 107, oder $\varkappa\{\bar{h}hl\}$ als die dem Triakisoktaeder entsprechende Hemiedrie entsteht aus dem Hexakistetraeder durch Verschwinden der Kanten F, und ist eine von 12 Deltoiden umschlossene Form. Diese Flächen sind senkrecht zu den dodekaedrischen Hauptschnitten und folglich monoklinisch, wie diess

schon aus dem entsprechenden Holoeder hervorgeht. Die 14 Ecken sind 6 vierflächige tetragonale und 8 dreiflächige trigonale, welche letztere wieder zweierlei Art sind. Durch diese Ecken gehen die entsprechenden Hauptaxen. Von den 24 Kanten sind je 12 gleichwerthig (E, G), sie liegen sämmtlich in den dodekaedrischen Hauptschnitten.

11. Das Tetraeder $\varkappa\{111\}$, Fig. 108, oder $\varkappa\{\bar{1}11\}$, die Hemiedrie des Oktaeder; dasselbe entspricht dem Tetraeder der Geometrie, entsteht aus dem Hexakistetraeder durch Verschwinden der einen Hälfte der trigonalen Ecken und ist von 4 trigonalen gleichseitigen Dreiecken begrenzt. Die 4 dreiflächigen Ecken sind trigonal, die 6 Kanten (E) sämmtlich gleichwerthig. Letztere liegen in den dodekaedrischen Hauptschnitten und sind parallel den hexaedrischen; durch ihre Mittelpunkte gehen die tetragonalen Hauptaxen, während jede trigonale Hauptaxe durch den Mittelpunkt einer Fläche und durch ein trigonales Eck geht.

§. 39. Hemitesserale Formen. A. Holoeder.

Für den Fall der Hemisymmetrie haben wir gesehen, dass die gleichwerthigen Richtungen und Ebenen des tesseralen Systems gegeben sind durch das Schema (IV). Aus letzterem geht hervor, dass in diesem Falle nur die hexaedrischen Hauptschnitte Ebenen der Symmetrie sind, und dass die 13 Hauptaxen des holosymmetrischen Systems in 3 rhombische, 4 hemitrigonale und in 6 monoklinische übergehen. Letztere sind daher in dem Falle der Hemisymmetrie keine Hauptaxen mehr und werden desshalb auch im Nachfolgenden nicht weiter berücksichtigt.

Setzen wir die Indices h, k, l als rational voraus, so geben uns die Flächen (IV) in Verbindung mit den zu ihnen parallelen Flächen die allgemeinste holoedrische Form des hemitesseralen Systems. Dieselbe wird also aus den Flächen

$$
\text{(VIII)} \quad \ldots\ldots \quad \left\{ \begin{array}{llll}
hkl & \bar{h}kl & \bar{h}\bar{k}l & h\bar{k}l \\
klh & \bar{k}lh & \bar{k}\bar{l}h & k\bar{l}h \\
lhk & \bar{l}hk & \bar{l}\bar{h}k & l\bar{h}k \\
\bar{h}\bar{k}\bar{l} & h\bar{k}\bar{l} & hk\bar{l} & \bar{h}k\bar{l} \\
\bar{k}\bar{l}\bar{h} & k\bar{l}\bar{h} & kl\bar{h} & \bar{k}l\bar{h} \\
\bar{l}\bar{h}\bar{k} & l\bar{h}\bar{k} & lh\bar{k} & \bar{l}h\bar{k}
\end{array} \right.
$$

bestehen und wird durch Spezialisirung der Indices wie früher in die speziellen Formen übergehen. Auch hier haben wir immer zwei korrelate Formen, deren Flächen zusammen einen holosymmetrischen Holoeder geben. Solche zwei korrelate Formen müssen ebenfalls, wie

man sich leicht aus Fig. 97 überzeugt, durch Drehung um eine der Axenrichtungen *X*, *Y*, *Z* um 90° in einander übergehen; sie unterscheiden sich daher nur durch ihre Stellung, freilich aber auch durch ihre verschiedenen physikalischen Eigenschaften.

Wir erhalten dem Gesagten zufolge also folgende Reihe Holoeder für das hemitesserale System.

1. Das Dyakisdodekaeder $\varkappa\{hkl\}$, Fig. 109, oder $\varkappa\{hlk\}$ begrenzt von 24 triklinischen Flächen, deren Umriss ein Trapezoid mit zwei gleichen anliegenden Seiten ist. Unter den 26 Ecken sind 6 vierflächige rhombische und 8 dreiflächige hemitrigonale. Durch diese Ecken gehen die gleichnamigen Hauptaxen. Die übrigen 12 Ecken sind vierflächige monoklinische und liegen in den hexaedrischen Hauptschnitten. Da die Kanten, welche ein einfaches dreiflächiges, hemitrigonales Eck bilden, alle gleichwerthig, diejenigen aber, welche ein einfaches vierflächiges, rhombisches Eck geben, abwechselnd gleichwerthig sein müssen, so folgt hieraus, dass die 48 Kanten dieser Form in eine Gruppe (*N*) von 24 und in zwei Gruppen von je 12 gleichwerthigen Kanten zerfallen. Die Kanten (*M*, *D*) der letzteren zwei Gruppen liegen in den hexaedrischen Hauptschnitten. Die Flächen senkrecht zu den Kanten *N* würden ein anderes Dyakisdodekaeder, die Flächen aber senkrecht zu den Kanten *M* oder *D* ein Pentagondodekaeder (s. unten) geben.

2. Das hemisymmetrische Ikositetraeder $\varkappa\{hkk\}$, Fig. 110, stimmt zwar in geometrischer Hinsicht mit dem schon früher betrachteten holosymmetrischen Ikositetraeder $\{hkk\}$ überein, unterscheidet sich aber von letzterem durch seine physikalischen Eigenschaften. Die Flächen nämlich sind triklinische; ebenso haben die Ecken einen hemisymmetrischen Charakter, wesshalb auch die Kanten *M* und *D* trotz gleicher Grösse nicht gleichwerthig sind.

3. Das hemisymmetrische Triakisoktaeder $\varkappa\{hhl\}$, Fig. 111. In Betreff dieser Form gelten dieselben Bemerkungen, wie für die vorhergehende; auch hier sind die Begrenzungsflächen triklinische.

4. Das Pentagondodekaeder $\varkappa\{hk0\}$, Fig. 112, oder $\varkappa\{h0k\}$, eine von 12 monoklinischen Flächen umschlossene Form. Der Umriss dieser Flächen ist ein symmetrisches Fünfeck (§. 32). Diese Form entsteht aus dem Dyakisdodekaeder durch Verschwinden der Kanten *M*; sie hat 8 hemitrigonale Ecken als Endpunkte der gleichnamigen Hauptaxen und ausserdem noch 12 monoklinische Ecken, die in den hexaedrischen Hauptschnitten liegen. Unter den 30 Kanten sind 6 gleich-

werthige (D) parallel den Axenrichtungen, durch deren Mittelpunkte die rhombischen Hauptaxen gehen; die übrigen 24 Kanten N sind ebenfalls unter sich gleichwerthig.

5. Das hemisymmetrische Dodekaeder $\varkappa\{110\}$, Fig. 113, unterscheidet sich von dem holoedrischen durch den Charakter seiner Ecken und Flächen. Letztere sind, obwohl sie auf je zwei Hauptschnitten senkrecht stehen, in Folge der Hemisymmetrie nach denselben monoklinische Flächen.

6. Das hemisymmetrische Oktaeder $\varkappa\{111\}$, Fig. 114, in geometrischer Hinsicht identisch mit dem holosymmetrischen. Die 6 Ecken sind aber hier rhombische und die Flächen hemitrigonale.

7. Das hemisymmetrische Hexaeder $\varkappa\{100\}$, Fig. 115 welches sich ebenfalls von dem holosymmetrischen nur in Bezug auf die Symmetrie der physikalischen Eigenschaften unterscheidet. Die 8 Ecken sind hemitrigonale, die 6 Flächen aber rhombische.

§. 40. Hemitesserale Formen. B. Hemieder.

Um auch noch die hemiedrischen Formen des hemitesseralen Systems kennen zu lernen, brauchen wir nur die Arten der Hemiedrie, welche wir bei dem holotesseralen Systeme kennen gelernt haben, auf die Flächen des Dyakisdodekaeder anzuwenden. Es kommt diess darauf hinaus, dass wir jene Flächen des Schema (VIII) aufsuchen, welche auch in den beiden Schema (VI) und (VII) vorkommen. Welches der letzteren beiden Schema wir aber auch wählen, so erhalten wir immer nur die Flächen

$$(IX) \ldots\ldots\ldots \left\{\begin{array}{llll} hkl & h\bar{k}\bar{l} & \bar{h}\bar{k}l & \bar{h}k\bar{l} \\ klh & k\bar{l}\bar{h} & \bar{k}\bar{l}h & \bar{k}l\bar{h} \\ lhk & l\bar{h}\bar{k} & \bar{l}\bar{h}k & \bar{l}h\bar{k} \end{array}\right.$$

welches abwechselnde Flächen abwechselnder Oktanten sind. Für das hemitesserale System ist also eine einzige Art der Hemiedrie möglich, welche uns durch das vorhergehende Schema repräsentirt wird, dessen Flächen die folgende allgemeinste Form dieser Gattung geben.

8. Das Dyakishexaeder $\varkappa\varkappa\{hkl\}$, $\varkappa\varkappa\{hlk\}$, $\varkappa\varkappa\{\bar{h}kl\}$, $\varkappa\varkappa\{\bar{h}lk\}$. Das Schema (IX) gibt uns die Flächen der dem ersten Symbole $\varkappa\varkappa\{hkl\}$ entsprechenden Form Fig. 116, vertauschen wir in demselben k und l, so erhalten wir die übrigen 12 Flächen des Dyakisdodekaeder $\varkappa\{hkl\}$, und die Form $\varkappa\varkappa\{hlk\}$ ist daher mit der vorhergehenden korrelat. Zwei solche korrelate Formen können aber nicht durch Drehung um irgend eine Axe in dieselbe Stellung gebracht, wie man sich durch Betrachtung

der Fig. 97 überzeugt; je zwei solche Formen sind vielmehr enantiomorph. Unterzieht man das zu dem früheren korrelate Dyakisdodekaeder $\varkappa\{\bar{h}kl\}$ derselben Hemiedrie, so erhält man zwei korrelate Dyakishexaeder $\varkappa\varkappa\{\bar{h}kl\}$ und $\varkappa\varkappa\{\bar{h}lk\}$, die unter sich natürlich ebenfalls enantiomorph, von den früheren zwei sich aber nur durch ihre Stellung unterscheiden, welche mit Bezug auf jede der Axenrichtungen eine um 90° gedreht ist.

Die 12 Flächen der gegenwärtigen Form nun sind triklinische und die Umrisse derselben Fünfecke mit zwei Paar gleicher und anliegender Seiten, aber mit lauter verschiedenen Winkeln. Unter den 20 Ecken sind 8 hemitrigonale, von denen je vier verschiedener Art sind und ungleich weit vom Mittelpunkte abstehen; durch je zwei solche verschiedene Ecken geht eine der vier hemitrigonalen Hauptaxen. Die übrigen 12 Ecken sind triklinische. Die 30 Kanten zerfallen in eine Gruppe von 6 gleichwerthigen (D) und in zwei Gruppen von je 12 gleichwerthigen Kanten (N, S). Die möglichen Flächen senkrecht zu den letzteren zwei Arten von Kanten geben wieder ein Dyakishexaeder, die senkrecht zu den Kanten D ein Pentagondodekaeder. Letztere Kanten sind parallel den hexaedrischen Hauptschnitten, durch ihre Mittelpunkte gehen die rhombischen Hauptaxen.

Diese Form wurde übrigens noch nicht in der Natur beobachtet. Die Spezialisirung ihrer Indices ergibt aber noch die folgenden hieher gehörigen Hemieder.

9. Das hemisymmetrische Trigondodekaeder $\varkappa\varkappa\{hkk\}$, Fig. 117, oder $\varkappa\varkappa\{\bar{h}kk\}$; dasselbe ist in geometrischer Hinsicht identisch mit dem holohexagonalen Trigondodekaeder, von dem es sich jedoch durch die physikalischen Eigenschaften seiner Ecken und Flächen unterscheidet. Letztere sind nämlich triklinisch, die Ecken aber hemitrigonal.

10. Das hemisymmetrische Triakistetraeder $\varkappa\varkappa\{hhl\}$, Fig. 118, oder $\varkappa\varkappa\{\bar{h}hl\}$. In Betreff dieser Gestalt ist das für die vorhergehende Gesagte zu wiederholen. Die geometrische Gestalt ist dieselbe wie die der entsprechenden holohexagonalen Form, die Flächen aber sind triklinische und die Ecken theils hemitrigonale, theils rhombische.

11. Das hemisymmetrische Tetraeder $\varkappa\varkappa\{111\}$, Fig. 119, oder $\varkappa\varkappa\{\bar{1}11\}$, welches sich von dem holohexagonalen durch die hemitrigonalen Flächen und Ecken unterscheidet.

§. 41. Tesserale Kombinationen und Zwillinge.

Zuvörderst bemerken wir, dass in dem tesseralen Systeme hemimorphe Kombinationen nicht möglich sind. Unter den Hauptschnitten dieses Systemes befindet sich nämlich keiner, der nicht mit einem der übrigen gleichwerthig wäre; es kann daher eine Hemimorphie der tesseralen Formen nicht stattfinden, und also auch keine derartigen Kombinationen geben.

Die tesseralen Kombinationen zerfallen in holosymmetrische und hemisymmetrische; natürlich wird ein Krystall, je nachdem an ihm die eine oder die andere Art von Kombinationen auftritt, eine wesentlich verschiedene Symmetrie in seinen physikalischen Eigenschaften zeigen. Ist eine Kombination nur von gewissen speziellen Formen gebildet (wie Fig. 121), so können wir freilich durch die blosse Betrachtung der krystallographischen Verhältnisse nicht die Frage nach dem holo- oder hemisymmetrischen Charakter der Kombination feststellen. In einem solchen Falle geben nur die physikalischen Eigenschaften des betreffenden Krystalles oder die Untersuchung anderer Krystalle derselben Substanz die nöthige Aufklärung.

Je nachdem die Kombinationen bloss von holoedrischen Formen oder auch von hemiedrischen gebildet sind, unterscheidet man noch zwischen holoedrischen und hemiedrischen Kombinationen. Die bisher untersuchten tesseralen Substanzen, welche in hemiedrischen Kombinationen auftreten, haben jedoch, mit Ausnahme von kaum mehr als zwei Fällen immer holosymmetrischen Charakter. Von der grossen Mannigfaltigkeit der tesseralen Kombinationen heben wir die nachfolgenden Beispiele hervor, welche sämmtlich für den Fall des Gleichgewichtes gezeichnet sind.

Fig. 120 gibt eine am Flussspath beobachtete holoedrische und holosymmetrische Kombination der Formen

$$\underset{a}{\{100\}},\ \underset{i}{\{421\}}$$

Fig. 121 stellt eine hemiedrische dreizählige Kombination der Formen

$$\underset{g}{\varkappa\{211\}},\ \underset{f}{\varkappa\{322\}},\ \underset{d}{\{110\}}$$

vor; dieselbe wird am Fahlerze beobachtet und ist daher alsdann eine holosymmetrische. Die Symbole der Formen g und f bestimmen sich in diesem Falle durch blosse Benützung der Zonenregel: je eine Fläche g

liegt nämlich mit zwei Flächen des Dodekaeders *d*, je eine Fläche *f* aber mit zwei Flächen des Trigondodekaeders *g* in einer Zone.

In Fig. 122 ist eine holoedrische, hemisymmetrische Kombination des Schwefelkieses abgebildet, welche aus den Formen

$$\underset{c}{\pi\{120\}},\ \underset{n}{\pi\{231\}},\ \underset{o}{\pi\{111\}}$$

besteht. Hat man vorausgeschickt, dass die Kombination eine hemisymmetrische ist, so kann man in der Aufzählung ihrer Formen auch den Buchstaben π weglassen.

Fig. 123 stellt eine hemiedrische, hemisymmetrische Kombination der Formen

$$\underset{a}{\pi\{100\}},\ \underset{c}{\pi\{120\}},\ \underset{o}{\varkappa\pi\{111\}}$$

dar; dieselbe wird am chlorsauren Natron beobachtet, welches wie Marbach fand, auf das Licht zirkularpolarisirend einwirkt.

Was die Zwillinge des tesseralen Systems betrifft, so sind bis jetzt nur zwei Gesetze für deren Bildung bekannt, indem nämlich nur die Flächen der Formen {111} und {110} als Zwillingsflächen auftreten. Was aber auch immer das Symbol der Zwillingsfläche wäre, so müsste bei tesseralen Zwillingen jede Fläche des einen Individuums immer eine mögliche Fläche des anderen sein. Wir wissen ja, dass tesserale Krystalle nach jeder ihrer Flächen isoschematisch sind, und dass daher eine Ebene, die durch Drehung um die Normale einer Fläche eines solchen Krystalles um 180° parallel einer anderen Fläche desselben wird, ebenfalls eine mögliche Fläche des Krystalles ist.

Beispiele für das Zwillingsgesetz {111} geben die Fig. 124, 125 und 126, in welchen immer die Normale der Fläche (111) als Zwillingsaxe gewählt ist; die Zwillinge sind für den Fall ihres Gleichgewichtes entworfen, d. h. so, dass korrespondirende Flächen gleich weit von einem und demselben Punkte abstehen. Als einzelne Individuen wurden der deutlicheren Anschauung wegen nur einfache Formen gewählt, doch können natürlich auch Kombinationen in ähnlicher Weise zu Zwillingen vereinigt sein.

Fig. 124 gibt einen Juxtapositions-Zwilling des Oktaeder, bei welchem sich auch die einzelnen Individuen im Gleichgewichte befinden; die korrespondirenden Flächen sind in der Zeichnung durch ihre Symbole ersichtlich gemacht. Dieser Zwilling wird unter anderen Mineralien auch am Spinell beobachtet.

Fig. 125, ebenfalls ein Juxtapositions-Zwilling, und zwar des Tetrakishexaeder {210}, wie er am gediegenen Kupfer vorkommt; hier sind jedoch die beiden Individuen so verkürzt, dass nur das der Zwillingsfläche gegenüber liegende rhomboedrische Eck auftritt. Die Zwillingskanten, von denen keine einspringend ist, sind somit parallel den Kanten G des Tetrakishexaeder, welche in dem dodekaedrischen Hauptschnitte Q' liegen.

In Fig. 126 ist ein Penetrationszwilling des Hexaeders {110} gezeichnet, für den Fall, dass die Mittelpunkte der beiden im Gleichgewichte befindlichen Individuen zusammenfallen. Aehnliche Gestalten werden am Flussspathe beobachtet.

Was das zweite Zwillingsgesetz {110} betrifft, so gibt dasselbe Zwillinge, deren einzelne Individuen parallele Axensysteme haben. Das charakteristische Axensystem jedes tesseralen Krystalles ist nämlich isoschematisch nach jedem dodekaedrischen Hauptschnitte; dreht man daher dasselbe um die Normale einer Fläche der Form {110} um 180°, so wird es wieder sich selbst parallel. Hieraus folgt, dass, wenn zwei Individuen sich mit Bezug auf eine Dodekaederfläche in Zwillingsstellung befinden, diess auch für alle anderen Flächen der Form {110} der Fall ist. Man ersieht hieraus aber auch, dass jeder holotesserale Holoeder durch Drehung um die Normale einer Fläche {110} um 180° wieder sich selbst parallel wird, und dass daher eigentlich von holoedrischen, holotesseralen Zwillingen nach dem Gesetze {110} keine Rede sein kann. Dasselbe gilt aber auch von den holotesseralen Hemiedern, welche freilich durch die angegebene Drehung in die korrelate Form übergehen. Da wir aber solche korrelate Individuen nur immer so beobachten, dass sie sich gegenseitig vollkommen durchkreuzen, so ist es offenbar, dass wir es auch in diesem Falle nicht mit wirklichen Zwillingen nach {110}, sondern bloss mit sogenannten Ergänzungszwillingen zu thun haben, die weniger zwei getrennte Individuen als eine eigenthümliche Flächenausbildung des entsprechenden Holoeders bedeuten. Fig. 127 gibt ein am Diamante beobachtetes Beispiel; es durchkreuzen sich hier zwei korrelate Individuen, bestehend beziehungsweise aus den Formen

$$\underset{n}{\varkappa\{321\}},\ \underset{o}{\varkappa\{111\}}\ \text{und}\ \underset{e}{\varkappa\{\bar{3}21\}},\ \underset{w}{\varkappa\{\bar{1}11\}}$$

Anders stellt sich jedoch die Sache mit Bezug auf das hemitesserale System, in welchem die dodekaedrischen Hauptschnitte keine Ebenen der Symmetrie mehr sind. Dreht man eine hemisymmetrische

Form um die Normale einer Dodekaederfläche um 180^0, so geht sie freilich, was ihre äusseren Umrisse betrifft, ebenfalls in die korrelate Form über; allein wirklich korrelate Formen unterscheiden sich hier, wie wir gesehen, durch die physikalischen Eigenschaften. Haben also bei einem hemitesseralen Zwillinge nach $\{110\}$ die Flächen korrespondirender Formen der beiden Individuen dieselben physikalischen Eigenschaften, so hat man es mit einem wirklichen Zwillinge zu thun; hätten jene Flächen aber verschiedene Eigenschaften, so würden sie einem Ergänzungszwillinge, bestehend aus zwei korrelaten Individuen, angehören. Ob der letztere Fall in der Natur vorkommt, dafür liegt kein gehörig festgestelltes Beispiel vor. Aber auch im ersteren Falle durchkreuzen sich die beiden Individuen nach Art der Ergänzungszwillinge. So gibt Fig. 128 einen Zwilling des Schwefelkieses, bestehend aus den beiden einfachen Formen

$$\underset{z}{\pi\{210\}} \text{ und } \underset{c}{\pi\{120\}}$$

dessen wahre Natur wir freilich durch die blosse Betrachtung seiner äusseren Umrisse nicht erkennen. Man trifft aber am Schwefelkiese denselben Zwilling noch mit den Flächen des Hexaeders, wobei die letzteren Flächen, je nachdem sie dem einen oder anderen Individuum angehören, die in Fig. 129 angegebene kreuzförmige Streifung zeigen. Diess beweist, dass man es mit einem wirklichen Zwillinge nach $\{110\}$ zu thun hat, da im entgegengesetzten Falle jede Hexaederfläche nur nach einerlei Richtung gestreift sein könnte.

Denkt man sich in Fig. 129 die Flächen des Hexaeders, wie diess ebenfalls am genannten Minerale beobachtet wird, so vergrössert, dass schliesslich die Flächen c und z ganz verschwinden, so erhält man ein Hexaeder, das zufolge der Streifung seiner Flächen als der Zwilling eines hemisymmetrischen Hexaeders nach $\{110\}$ aufzufassen ist.

6. Kapitel.

Die Symmetrieverhältnisse des hexagonalen Systems.

§. 42. Die gleichwerthigen Ebenen der holo- und hemihexagonalen Systeme.

Hexagonal nennen wir Krystalle mit 7 Hauptschnitten, von welchen sechs (P, P'....) tautozonal sind und sich unter Winkeln von 30^0 kreuzen, der siebente (T) aber senkrecht steht auf den anderen. Die diesen Hauptschnitten auf der Sphäre der Projektion entsprechenden Hauptzonenkreise sind in Fig. 130 dargestellt, wobei der Hauptschnitt T als Ebene der Zeichnung gewählt, das Auge aber in den zu T senkrechten Radius der Kugel versetzt gedacht ist. Die Durchschnittspunkte dieser Zonenkreise sind natürlich die Pole möglicher Flächen, und zwar werden letztere Flächen die Hauptschnitte selbst sein müssen, indem ja die Durchschnittslinie je zweier Hauptschnitte senkrecht zu einem dritten Hauptschnitte ist. Die den sechs tautozonalen Hauptschnitten entsprechenden Hauptzonenkreise werden sich alle in einem und demselben Punkte schneiden, welcher offenbar der Pol des Hauptschnittes T ist. Gleich weit von letzterem Punkte abstehend werden wir immer die Pole dreier Flächen U, V, W bestimmen können (§. 27), so dass dieselben beziehungsweise in drei Hauptschnitten liegen, welche sich unter Winkeln von 60^0 kreuzen wie P, Q, R. Wir beziehen nun hexagonale Krystalle immer auf ein Axensystem, dessen Richtungen durch drei Flächen wie U, V, W, dessen Längen aber durch den Hauptschnitt T bestimmt werden. Die Elemente hexagonaler Krystalle haben somit die Form

$$a : a : a$$
$$\xi = \eta = \zeta$$

und sind nur mit Bezug auf die Grösse der drei gleichen Axenwinkel unbestimmt. Verschiedene hexagonal krystallisirende Körper können sich daher auch nur durch die Grösse dieses Winkels unterscheiden. Es ist aber klar, dass für einen und denselben Krystall verschiedene ähnliche Axensysteme möglich sind, je nachdem man Flächen U, V, W wählt, deren Pole (100), (010), (001) verschieden weit vom Pole des Hauptschnittes T abstehen, oder auch, indem man Flächen der drei anderen Zonenkreise P', Q', R' zu Axenebenen wählt. Wir nennen nun jene drei Hauptschnitte, in welchen die Pole (100), (010), (001) der Axenebenen U, V, W liegen, die primären, die anderen der tautozonalen Hauptschnitte die sekundären, den zu ihnen senkrechten Hauptschnitt T aber den basischen.

Jeder der primären Hauptschnitte ist senkrecht zu einem der sekundären und umgekehrt. In den primären Hauptzonenkreisen liegen auch die Endpunkte X, Y, Z der Axenrichtungen, d. i. der Durchschnittslinien der Flächen U, V, W. Diese Punkte liegen auf derselben Seite des Poles von T, wie die entsprechenden Pole (100), (010), (001), und zwar weiter oder näher als letztere vom Pole T entfernt, je nachdem der Winkel (100) (010), d. i. der Normalenwinkel der Axenebenen kleiner oder grösser als 90° ist (§. 27). Letzterer Winkel ist nämlich kleiner oder grösser als ein rechter, je nachdem der Axenwinkel grösser oder kleiner als 90° ist. Die Punkte X, Y, Z stehen natürlich unter sich und vom Pole T gleich weit ab. Für das eingeführte Axensystem werden aber die Symbole der Hauptschnitte (§. 27)

$$P(01\bar{1}),\ Q(\bar{1}01),\ R(1\bar{1}0),$$
$$P'(2\bar{1}\bar{1}),\ Q'(\bar{1}2\bar{1}),\ R'(\bar{1}\bar{1}2),$$
$$T(111),$$

mit Hilfe deren man sich leicht überzeugt, dass auch in diesem Systeme jeder Hauptzonenkreis dieselben Indices hat wie der Hauptschnitt, dessen Durchschnitt mit der Sphäre der betreffende Zonenkreis eben ist.

Da diese Symbole auch noch die Hauptschnitte repräsentiren, wenn man alle Indices mit entgegengesetzten Vorzeichen versieht, so haben wir für jeden Hauptschnitt zwei Symbole, welche den beiden gerade entgegengesetzten Polen desselben entsprechen. Es ist auch nicht schwer, für jeden dieser Pole mit Hilfe des §. 14 das zugehörige Symbol anzugeben, indem, wie aus Fig. 130 hervorgeht, die Pole der Hauptschnitte immer mit einem der Pole (100), (010), (001) auf derselben Seite eines der Hauptzonenkreise liegen. So muss für

jede Ebene (hkl), deren Pol auf derselben Seite der Zone $Q = [\bar{1}01]$ wie der Pol (100) liegt, offenbar $-h + l < 0$ sein, daher der dem Pol (100) zunächst gelegene Pol des Hauptschnittes P nur das Symbol $(2\bar{1}\bar{1})$ und nicht $(\bar{2}11)$ haben kann. Hiedurch rechtfertigt sich also die in Fig. 130 angegebene Bezeichnung der Pole der Hauptschnitte.

Die hexagonalen Krystalle sind nicht nur bei jeder Temperatur nach ihren Hauptschnitten isoschematisch, sondern auch mit Bezug auf jede mögliche Fläche, deren Pol in dem Hauptzonenkreise T liegt, da dieser Zone Hauptschnitte angehören, die nicht auf einander senkrecht stehen.

Schlagen wir, um zur Kenntnis der gleichwerthigen Richtungen und Ebenen zu gelangen, das im §. 27 angegebene Verfahren ein, so kommen wir mit dem eben bestimmten Axensysteme nicht durch, da dasselbe bloss nach den primären Hauptschnitten ein isoschematisches Axensystem, und zwar der zweiten Art ist. Wir würden also noch ein Axensystem für die sekundären Hauptschnitte und eines für den basischen Hauptschnitt benöthigen. Allein wir brauchen die sekundären Hauptschnitte nicht weiter zu berücksichtigen; ist nämlich ein Komplex von Ebenen isoschematisch nach dem basischen und den primären Hauptschnitten, so muss er es dem §. 21 zufolge auch mit Bezug auf die sekundären sein, indem jeder der letzteren Hauptschnitte senkrecht ist zu einem primären und zu dem basischen Hauptschnitte, welche zwei Flächen sich unter Winkeln von 90° schneiden.

Die Aufsuchung der gleichwerthigen Richtungen und Ebenen reduzirt sich also auf die Aufgabe, die Ebenen zu bestimmen, die mit einer gegebenen Ebene eine nach dem basischen und den primären Hauptschnitten isoschematischen, einfachen Komplex bilden. Wie man nun mit Hilfe des eingeführten Axensystems für die letzteren Hauptschnitte die mit einer Ebene isoschematischen finden könne, ist klar. Für den basischen Hauptschnitt aber hätten wir die gegebene Ebene mit Hilfe der Formeln für die Aenderung der Axen erst auf ein Axensystem zu beziehen, das isoschematisch nach dem basischen Hauptschnitte ist, alsdann je nach der Art dieses Axensystems für dasselbe das Symbol der isoschematischen Ebene zu ermitteln und diese zuletzt wieder auf das ursprüngliche Axensystem zu beziehen. Wir wollen dieses Problem aber direkt lösen und zeigen, wie man für irgend eine Ebene das Symbol der inversen Ebene findet.

Man nennt nämlich von zwei Ebenen die eine die direkte, die andere die inverse, wenn der äussere Neigungswinkel derselben durch den basischen Hauptschnitt halbirt wird, demgemäss also zwei solche

Ebenen isoschematisch nach letzterem Hauptschnitte sein werden. Die Pole solcher Ebenen werden offenbar in einem und demselben Zonenkreise mit dem Pole (111) zu beiden Seiten desselben liegen und gleich weit von demselben abstehen müssen. Sind nun die Symbole der zwei Ebenen etwa

$$E(hkl) \text{ und } E'(efg)$$

so wird der Kreuzungspunkt der Zone $[(hkl)\ (111)\ (efg)]$ mit dem Hauptzonenkreise T der Pol einer Fläche S sein, deren Symbol

$$S\,(k + l - 2h,\ l + h - 2k,\ h + k - 2l)$$

wird, wenn man die Indices der ersteren Zone aus den beiden Flächen (hkl) und (111) derselben berechnet. Die Entfernung des Poles S vom Pole (111) ist aber offenbar 90^0, da ja letzterer Pol von jedem Punkte des Hauptzonenkreises T um diesen Betrag absteht. Die Ebene S wird daher den inneren Neigungswinkel der beiden Ebenen E und E' halbiren, und wir können dem §. 19 zufolge die Indices der Ebene E durch die Indices der Ebenen E, S, T ausdrücken. Wir erhalten auf diese Weise

$$e = \pm\left([k + l - 2h] + 1\,.\left[\frac{ES}{ET}\right]\right)$$
$$f = \pm\left([l + h - 2k] + 1\,.\left[\frac{ES}{ET}\right]\right)$$
$$g = \pm\left([h + k - 2l] + 1\,.\left[\frac{ES}{ET}\right]\right)$$

und

$$\left[\frac{ES}{ET}\right] = \left[\frac{(k^2 - l^2 + hk - hl)\ldots.}{(k - l)\ldots.}\right] = h + k + l.$$

Somit wird, wenn wir die oberen Zeichen beibehalten

$$\left.\begin{aligned} e &= -\,h + 2k + 2l \\ f &= \ \ 2h - \ k + 2l \\ g &= \ \ 2h + 2k - \ l \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(X)}$$

Dass aber die oberen Zeichen die richtigen sind, ergibt sich aus Satz II, §. 14. Es muss nämlich der Ausdruck $\left[\frac{ET}{E'T}\right]$ negativ sein, da die Pole E und E' auf entgegengesetzten Seiten des Poles T sich befinden. Mit Hilfe der oberen Zeichen findet man nun wirklich

$$\left[\frac{ET}{E'T}\right] = \left[\frac{(hkl)\ (111)}{(efg)\ (111)}\right] = \left[\frac{k - l\ldots}{f - g\ldots}\right] = \left[\frac{k - l\ldots}{3\,(l - k)\ldots}\right]$$
$$= -\,{}^1/_3.$$

Die Gleichungen (X) müssen natürlich richtig bleiben, wenn man die Indices e, f, g und h, k, l gegenseitig vertauscht, wovon man sich leicht auch durch Auflösung der Gleichungen nach h, k, l überzeugen könnte. Sind die Indices h, k, l rational, so sind es auch die Indices e, f, g, und die Gleichungen (X) enthalten somit den Beweis, dass wirklich zu jeder Fläche eines hexagonalen Krystalles eine inverse Fläche möglich ist. Diess folgt aber schon daraus, dass ein solcher Krystall nach drei Flächen wie die primären Hauptschnitte sind, isoschematisch ist.

Aus der Symmetrie der Gleichungen (X) erhellt auch sogleich, dass, wenn (efg) die inverse Ebene von (hkl) ist, und man die Ordnung der Indices in dem letzten Symbole ändert, zu der so erhaltenen Ebene aber wiederum die inverse bestimmen soll, man einfach auch in dem Symbole (efg) die Ordnung der Indices auf dieselbe Weise zu ändern hat. Vertauscht man z. B. in den Gleichungen h mit k, so geht offenbar auch e in f und f in e über.

Gehen wir nun zur Bestimmung der Ebenen über, die etwa mit der Ebene (hkl) einen nach den Hauptschnitten P, Q, R, T isoschematischen, einfachen Komplex bilden. Wir beginnen mit dem Hauptschnitte P, mit Bezug auf welchen das eingeführte Axensystem ein isoschematisches der zweiten Art ist, und erhalten daher durch Vertauschung der betreffenden Indices die zwei Ebenen

$$hkl, \; hlk$$

Indem wir das gleiche Verfahren auf den Hauptschnitt Q anwenden, erhalten wir die Ebenen

$$\begin{matrix} hkl & hlk \\ lkh & klh \end{matrix}$$

Der Hauptschnitt R gibt nur zwei neue Ebenen, so dass wir jetzt die sechs Ebenen

$$\text{(XI)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \left\{ \begin{matrix} hkl & klh & lhk \\ hlk & lkh & khl \end{matrix} \right.$$

haben. Gehen wir nun auf den basischen Hauptschnitt über, so haben wir nach den früheren Bemerkungen zu jeder der sechs Ebenen des vorhergehenden Schema (XI) die inverse Ebene zu suchen. Diess geschieht aber nach dem zuvor Gesagten dadurch, dass wir die durch die Gleichungen (X) gegebenen Indices e, f, g auf dieselbe Weise anordnen, in der die Grössen h, k, l in den Symbolen (XI) aufeinander folgen. Wir erhalten so im Ganzen die zwölf Ebenen

$$\left.\begin{array}{ccc} hkl & klh & lhk \\ hlk & lkh & khl \\ efg & fge & gef \\ egf & feg & gfe \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(XII)}$$

Setzen wir das Verfahren jetzt wieder für den Hauptschnitt *P* fort, so überzeugen wir uns sogleich, dass eine weitere Fortsetzung des Verfahrens keine neuen Ebenen mehr ergibt, und dass also die Ebenen (XII) wirklich einen einfachen Komplex vorstellen, der isoschematisch ist nach dem basischen und den primären Hauptschnitten und in Folge dessen auch nach den sekundären Hauptschnitten. Die Symbole der Ebenen (XII) leiten sich offenbar aus einer derselben dadurch ab, dass man in dem Symbole dieser Ebene und in dem ihrer inversen Ebene jede mögliche Permutation der Indices vornimmt; die Anzahl aller Permutationen dreier Grössen ist ja sechs. Diese Regel muss natürlich auch noch für spezielle Lagen der Ebenen (XII) gelten.

Es soll nun auch noch die Vertheilung der Pole dieser Ebenen auf der Sphäre der Projektion angegeben werden. Man sieht hiebei sogleich, dass, wenn nur der Pol einer der Ebenen (XII), etwa (*hkl*), auf der oberen Seite des basischen Hauptschnittes liegt, diess auch für die Pole der übrigen Ebenen (XII) gelten muss. Denn ist für die gewählte Ebene $h + k + l > 0$, so ist auch für alle übrigen Ebenen die Summe ihrer Indices grösser als Null. Wir wollen nun im Folgenden annehmen, dass die Pole der Ebenen (XII) wirklich auf die obere Hälfte der Projektionssphäre entfallen. Hiedurch wird aber die Allgemeinheit unserer Untersuchung nicht beeinträchtigt; denn lägen die Pole der Ebenen (XII) alle auf der unteren Seite des basischen Hauptschnittes, so können wir dieselben durch Umänderung der Zeichen aller Indices in solche verwandeln, deren Pole auf der oberen Seite liegen. Durch diese Aenderung der Vorzeichen wird ja die Richtung der Ebene nicht geändert, und sie werden daher dann noch ebenso gut dazu dienen, die gleichwerthigen Ebenen der hexagonalen Systeme zu bestimmen.

Da nun der Ebenen (XII) zwölf sind, so ist klar, dass in jedes der zwölf Dreiecke, in welche die Halbsphäre durch die Hauptschnitte getheilt wird, der Pol je einer dieser zwölf Ebenen entfallen muss, und dass in gegenüberliegende dieser Dreiecke auch immer die Pole zweier Ebenen liegen werden, wovon die eine die inverse der anderen ist. Kennt man daher die Lage der Pole der sechs ersten oder sechs letzten der Ebenen (XII), so ist auch die der übrigen Pole hiedurch gegeben. Jede dieser zwei Gruppen von Ebenen ist aber isoschematisch nach den

primären Hauptschnitten, es werden daher auch die Pole ihrer Ebenen in solchen sechs Dreiecken der Fig. 130 liegen müssen, die mit Bezug auf die primären Hauptschnitte symmetrisch liegen. Solche sechs Dreiecke sind aber sowohl diejenigen, welche je einen der Axenpunkte *X*, *Y*, *Z* enthalten, als auch die übrigen sechs Dreiecke. Wir nennen die ersteren dieser Dreiecke die direkten, und ebenso Ebenen, deren Pole in denselben liegen, vorzugsweise direkte im Gegensatze zu den inversen Ebenen, deren Pole in die übrigen sechs inversen Dreiecke entfallen.

Von den zwölf Ebenen (XII) werden daher entweder die sechs ersten oder die sechs letzten die direkten Ebenen sein, und wir wollen, um eine bestimmte Annahme zu machen, voraussetzen, dass die mit den Indices *h*, *k*, *l* bezeichneten Ebenen (XII) die direkten wären. Die Lage der Pole dieser Ebenen ergibt sich dann sehr leicht aus der Lage des Poles einer dieser Ebenen, indem, wie man sich durch Betrachtung der Fig. 130 überzeugt, je zwei aufeinander folgende der direkten Dreiecke sich gleich gegen eine der Axenrichtungen verhalten mit Bezug auf die zwei anderen aber entgegengesetzte Lage haben. Es werden daher auch die Symbole zweier der direkten Ebenen, deren Pole in zwei aufeinander folgenden der direkten Dreiecke liegen, sich nur durch die Vertauschung der betreffenden zwei Indices unterscheiden können. Nehmen wir also etwa an, dass in das Dreieck (111) $(2\bar{1}\bar{1})$ $(11\bar{2})$ der Pol der Ebene (hkl) entfällt, so wird in dem Dreiecke (111) $(\bar{1}2\bar{1})$ $(01\bar{1})$ der Pol (khl) liegen müssen u. s. f. Es ist klar, das zwischen je zwei aufeinander folgenden inversen Dreiecken, sowie zwischen den Symbolen der ihnen angehörigen inversen Ebenen dieselbe Beziehung wie für zwei solche direkte Dreiecke stattfindet, und dass daher die Anordnung der Pole der inversen Ebenen sich ebenfalls aus der Lage eines einzigen derselben ergibt. Diese Pole bestimmen sich, wie schon erwähnt, aber auch dadurch, dass jeder derselben mit dem Pole der zugehörigen direkten Ebene und mit dem Pole (111) in einem Zonenkreise liegt, ebenso weit von letzterem Pole abstehend wie der direkte Pol.

Die Pole aller Ebenen (XII) werden, wie diess auch aus §. 21 hervorgeht, gleich weit von dem Pole (111) abstehen und die Winkel zwischen je zwei benachbarten dieser Pole werden nur zweierlei verschiedene Werthe haben, die in der Aufeinanderfolge immer mit einander abwechseln. Der Winkel zwischen je zwei benachbarten Polen wird aber offenbar immer von dem dazwischen liegenden Hauptschnitte halbirt; je zwei solche Pole stehen daher gleich weit ab von dem Pole

einer Fläche, welcher der Zone der zwei ersten Pole und dem zwischen beiden liegenden Hauptzonenkreise angehört. Durch diese Bemerkung ist es auch möglich, die genaue Lage der Polpunkte auf der Sphäre aus der Lage eines dieser Pole zu finden, welches Problem jedoch in ein späteres Kapitel gehört.

Die inversen Flächen der Axenebenen $U(100)$, $V(010)$, $W(001)$ haben, wie diess aus den Gleichungen (X) folgt, die Symbole $(\bar{1}22)$, $(2\bar{1}2)$, $(22\bar{1})$; bestimmt man mit Hilfe dieser Flächen und der Fläche (111) ein Axensystem, so wird sich dasselbe von dem ursprünglichen Axensysteme nur dadurch unterscheiden, dass es um die Normale zu dem basischen Hauptschnitte um 180° herum gedreht ist. Wir können diese beiden Axensysteme daher auch als direktes und inverses unterscheiden. Es ist klar, dass sich die inversen Ebenen zu dem inversen Axensysteme gerade so verhalten, wie die direkten Ebenen mit Bezug auf das direkte Axensystem. Auf das inverse Axensystem bezogen, würden daher direkte und inverse der Ebenen (XII) gegenseitig ihre Indices vertauschen.

Durch das bisher Entwickelte ist also die in Fig. 130 gegebene Vertheilung der Pole der Ebenen (XII) vollkommen gerechtfertigt. Handelt es sich um spezielle Zahlenwerthe der Indices, so hat man freilich, um die Lage der Pole nach dem Schema der Fig. 130 angeben zu können, erst zu untersuchen, welche der Ebenen (XII) die direkten sind, und welcher Pol der direkten Ebenen in das Dreieck (111) $(2\bar{1}\bar{1})$ $(10\bar{1})$ entfällt. Um die Kennzeichen für diese zwei Fälle zu erhalten, wollen wir jetzt noch die Bedingungen für die Indices h, k, l aufsuchen, unter welchen der Pol der Ebene (hkl), wie diess in Fig. 130 vorausgesetzt ist, in das Dreieck (111) $(2\bar{1}\bar{1})$ $(10\bar{1})$ entfällt. Damit nun der Pol (hkl) in diesem Dreiecke liege, genügt es offenbar, dass derselbe folgende drei Bedingungen erfülle: derselbe muss

erstens auf derselben Seite des Zonenkreises $T[111]$ liegen, wie die Pole der Flächen (111), (100)....,

zweitens auf derselben Seite des Zonenkreises $P[01\bar{1}]$ wie die Pole $(01\bar{1})$, $(11\bar{2})$....,

drittens endlich auch auf derselben Seite des Zonenkreises $Q(1\bar{2}1)$ wie die Pole (100), $(1\bar{2}1)$.... liegen.

In speziellen Fällen kann allerdings der Pol (hkl) auch in einem oder mehreren dieser Zonenkreise liegen, ohne dadurch aufzuhören, ein Punkt des betrachteten Dreieckes zu sein. Mit Rücksicht auf diese Bemerkung geben die angeführten Bedingungen dem §. 14 zufolge für die Indices h, k, l die folgenden Relationen:

$$\begin{aligned} h + k + l &\geqq 0 \\ k - l &\geqq 0 \\ h - 2k + l &\geqq 0 \end{aligned}$$

Die zwei letzten dieser Relationen lassen sich leicht in eine zusammenfassen. Addirt man nämlich zur zweiten Relation beiderseits k, so erhält man

$$2k - l \geqq k$$

und die dritte Relation gibt alsdann

$$h \geqq 2k - l \geqq k.$$

Demzufolge können wir somit folgenden Satz aussprechen:

„Der Pol der Ebene (hkl) fällt innerhalb des Dreieckes (111) $(2\bar{1}\bar{1})$ $(10\bar{1})$ oder ausserhalb desselben, je nachdem die Indices dieser Ebene den Relationen $h + k + l \geqq 0$ und $h \geqq 2k - l \geqq k$ genügen oder nicht."

In dem angegebenen Dreiecke werden also auch die Pole der Flächen (532), $(3\bar{1}\bar{1})$, (321), $(1\bar{1}\bar{2})$.... liegen müssen.

Die Bedingung $h \geqq k \geqq l$, welcher diesem Satze zufolge die Indices einer Ebene, deren Pol dem Dreiecke (111) $(2\bar{1}\bar{1})$ $(10\bar{1})$ angehört, genügen müssen, kann nur für dieses eine der direkten Dreiecke bestehen. Es geht diess daraus hervor, dass die Ebenen der anderen Dreiecke durch Vertauschung der Indices h, k, l erhalten werden, und alsdann natürlich nicht mehr der erste grösser als der zweite, dieser aber grösser als der dritte sein kann. Mit Rücksicht hierauf kann man auch leicht die Frage beantworten, welche Bedingungen die Indices einer Ebene E zu erfüllen haben, damit der Pol der letzteren überhaupt in eines der oberen direkten Dreiecke entfalle. Ordnet man nämlich die Indices dieser Ebene nach ihrer Grösse in fallender Reihe, so erhält man hiedurch das Symbol einer Ebene F, deren Pol natürlich ebenfalls in einem der direkten Dreiecke, und zwar dem Gesagten zufolge in dem Dreiecke (111) $(2\bar{1}\bar{1})$ $(10\bar{1})$ liegen muss. Indem wir nun auf die Ebene F den zuletzt bewiesenen Satz anwenden, erhalten wir unmittelbar den folgenden:

„Der Pol einer Ebene E, deren grösster, mittlerer und kleinster Index der Reihe nach p, q, r sind, wird, falls $p + q + r \geqq 0$, in eines der oberen direkten oder inversen Dreiecke zu liegen kommen, je nachdem diese Indices der Relation $p \geqq 2q - r$ genügen oder nicht."

Es ist jetzt auch leicht die Bedingung anzugeben, unter welcher der Pol der Ebene (efg) in das Dreieck (111) $(\bar{2}11)$ $(\bar{1}01)$ entfällt.

Man kann diese Bedingungen aus dem entsprechenden Satze für das direkte Dreieck ableiten, indem, wenn der Pol (efg) in das erwähnte Dreieck fallen soll, der Pol der zu (efg) inversen Ebene natürlich dem Dreiecke (111) $(2\bar{1}\bar{1})$ $(10\bar{1})$ angehören muss. Man kann diese Bedingungen aber auch leicht direkt wie früher ableiten und hat also den Satz:

„Der Pol der Ebene (efg) fällt innerhalb oder ausserhalb des Dreieckes (111) $(\bar{2}11)$ $(\bar{1}01)$, je nachdem die Indices derselben den Relationen $e + f + g \geqq 0$ und $e \leqq 2f - g \leqq f$ genügen oder nicht."

Bei dieser Gelegenheit wollen wir die Regel angeben, nach der wir die zur Bezeichnung dienenden Flächen der hexagonalen Formen wählen. Es ist leicht einzusehen, dass auch die einfachste dieser Formen wenigstens drei obere Flächen wird haben müssen, welche symmetrisch um den Pol (111) liegen werden. Sind nun diese drei Flächen direkte, so wird jedenfalls der Pol einer derselben entweder in das Dreieck (111) $(2\bar{1}\bar{1})$ $(10\bar{1})$ oder in das Dreieck (111) $(2\bar{1}\bar{1})$ $(1\bar{1}0)$ entfallen müssen; sind jene drei Flächen aber inverse, so wird ein Pol derselben jedenfalls in eines der beiden entgegengesetzten Dreiecke $(111)(\bar{2}11)(\bar{1}01)$ und (111) $(\bar{2}11)$ $(\bar{1}10)$ zu liegen kommen. Zur Bezeichnung der hexagonalen Formen wählen wir nun vor Allem die direkten Flächen, und zwar zuerst diejenige, deren Pol in das Dreieck (111) $(2\bar{1}1)$ $(10\bar{1})$ entfällt, im Ermanglungsfalle aber die Fläche, deren Pol in dem anliegenden Dreiecke (111) $(2\bar{1}\bar{1})$ $(1\bar{1}0)$ liegt; hat die Form jedoch bloss inverse Flächen, so benützen wir zur Bezeichnung in erster Linie die Fläche, deren Pol in dem Dreiecke (111) $(\bar{2}11)$ $(\bar{1}01)$ liegt, in zweiter Linie aber diejenige, deren Pol dem Dreiecke (111) $(\bar{2}11)$ $(\bar{1}10)$ angehört.

Schema (XII) gibt uns die Anordnung, welche gleichwerthige Ebenen im holohexagonalen Systeme im Allgemeinen haben müssen, die Normalen dieser Ebenen geben uns dann gleichwerthige Richtungen dieses Systems. Die 7 Hauptschnitte sind in diesem Falle alle Ebenen der Symmetrie; mit Bezug auf ihre Gleichwerthigkeit theilen sie sich aber in drei Gruppen, von denen eine bloss aus dem basischen Hauptschnitte besteht, während die primären und sekundären Hauptschnitte die zwei anderen Gruppen bilden. Man überzeugt sich hievon leicht, wenn man im Schema (XII) die Indices k, k, l so wählt, dass die Ebene (hkl) einmal zur Fläche (111), dann zur Fläche $(01\bar{1})$ und schliesslich zur Fläche $(2\bar{1}\bar{1})$ wird. Im ersten Falle nämlich reduziren sich die Ebenen (XII) alle auf die Fläche (111), im zweiten aber auf die Flächen

$$(01\bar{1}),\ (\bar{1}01),\ (1\bar{1}0),\ (0\bar{1}1),\ (10\bar{1}),\ (\bar{1}10),$$

welche paarweise den primären Hauptschnitten parallel sind; ebenso geben im dritten Falle die Ebenen (XII) die drei sekundären Hauptschnitte.

Gehen wir nun zum Falle der Hemisymmetrie über, so finden wir leicht durch Betrachtung der Fig. 130, dass, wenn es sich um sechs der Ebenen (XII) handelt, deren Anordnung mit Bezug auf gleichwerthige Hauptschnitte immer dieselbe ist, diess auf dreierlei Arten bewerkstelligt werden kann, wie es die folgenden drei Schema lehren:

$$(XIII) \ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{matrix} hkl & klh & lhk \\ hlk & lkh & khl \end{matrix} \right.$$

$$(XIIIa) \ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{matrix} hkl & klh & lhk \\ gfe & feg & egf \end{matrix} \right.$$

$$(XIV) \ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{matrix} hkl & klh & lhk \\ efg & fge & gef \end{matrix} \right.$$

Die Anordnungen (XIII) und (XIIIa) sind aber nicht wesentlich von einander verschieden. Die Ebenen (XIII) verhalten sich nämlich gerade so mit Bezug auf die primären Hauptschnitte, wie diess die Ebenen (XIIIa) mit Bezug auf die sekundären thun. Der Unterschied, den wir aber zwischen primären und sekundären gemacht, ist ein ganz willkürlicher, und wir können immer an verschiedenen Substanzen, welche hexagonal krystallisiren, je drei beliebige der Hauptschnitte, welche sich unter Winkeln von 60^0 schneiden, zu primären Hauptschnitten machen. Für Krystalle einer und derselben Substanz können aber natürlich die gleichwerthigen Ebenen nicht durch (XIII) und (XIIIa) gegeben sein, da ja diess unmöglich ist.

Wir haben also im hexagonalen Systeme ein proto- und deuterohemisymmetrisches System, deren gleichwerthige Ebenen und Richtungen durch die Schema (XIII) und (XIV) gegeben sind. Das erstere dieser Systeme kann man auch kurz als rhomboedrisches bezeichnen; in demselben sind diejenigen drei Hauptschnitte, welche die Winkel je zweier benachbarten der Ebenen (XIII) halbiren, Ebenen der Symmetrie. Die Ebenen (XIII) bilden nämlich, wie aus der Uebereinstimmung der Schema (XIII) und (XI) hervorgeht, einen einfachen, nach den erwähnten Hauptschnitten isoschematischen Komplex. Diese Hauptschnitte wählen wir auch immer als primäre.

In dem gyroidalen Systeme dagegen, dessen gleichwerthige Richtungen und Ebenen durch das Schema (XIV) gegeben sind, ist der basische Hauptschnitt eine Ebene der Symmetrie, da zu jeder direkten Ebene auch die entsprechende inverse gleichwerthig ist.

Mit Bezug auf diesen Hauptschnitt bilden aber die Ebenen (XIV) offenbar einen isoschematischen dreizähligen Komplex. Von den übrigen Hauptschnitten ist keiner eine Ebene der Symmetrie.

Durch das zuletzt Gesagte überzeugt man sich auch, dass wirklich, wie diess der Fall sein muss, die Symmetrieverhältnisse der hemihexagonalen Systeme nicht mit denen anderer Systeme zusammenfallen.

Um schliesslich auch noch für die verschiedenen hexagonalen Systeme die speziellen Fälle kennen zu lernen, welche für die Zahl und Anordnung der gleichwerthigen Ebenen und Richtungen dieser Systeme stattfinden können, haben wir die Fälle zu betrachten, in welchen die Normalen der Ebenen (XII) parallel einem oder mehreren der Hauptschnitte werden. Es genügt aber hiebei, eine einzige dieser Ebenen, etwa (hkl) zu untersuchen. Fällt nämlich der Pol einer der Ebenen (XII) in einen der Hauptschnitte, so wird nach dem, was wir über die Vertheilung der Pole dieser Ebenen gesagt haben, diess auch für die übrigen dieser Ebenen stattfinden müssen, wie sich jedoch auch in jedem der folgenden speziellen Fälle leicht beweisen liesse. Da nun im Einklange mit dem früher Gesagten der Pol der Ebene (hkl) in dem Dreiecke (111) $(2\bar{1}\bar{1})$ $(11\bar{2})$ liegen soll, so sind im Ganzen folgende sieben Fälle möglich:

1. Der schon betrachtete allgemeine Fall, in welchem der Pol der Ebene (hkl) in keinem der Hauptschnitte liegt.

2. Der Pol (hkl) ist ein Punkt des basischen Hauptzonenkreises, dessen Symbol $[111]$ ist. In diesem Falle ist also

$$h + k + l = 0$$

und die Ebenen (XII) gehen in nur sechs von einander verschiedene über, deren Pole sämmtlich in dem basischen Zonenkreise liegen.

3. Die Normale der Ebene (hkl) fällt in den primären Hauptschnitt P; der Pol dieser Ebene ist also ein Punkt des Zonenkreises $[01\bar{1}]$ und folglich hat man

$$k = l.$$

Die Ebenen (XII) reduziren sich in diesem Falle auf sechs, deren Pole in den primären Hauptschnitten liegen. Die Annahme, dass der Pol (hkl) in dem Hauptzonenkreise R läge, führt zu keinem neuen speziellen Falle, sondern gibt auch nur als Bedingung die Gleichheit zweier Indices der Ebene (hkl).

4. Entfällt der Pol (hkl) in die beiden Hauptzonenkreise T und P, so muss derselbe offenbar identisch sein mit dem Pole der Fläche $(2\bar{1}\bar{1})$ und somit

$$k = l = -\frac{h}{2}$$

sein. Die Ebenen (XII) gehen alsdann, wie wir schon früher bemerkt, in die drei primären Hauptschnitte über. Auch hier würde die Annahme, dass der Pol (hkl) in die Zonenkreise R und T entfällt, offenbar zu keinem neuen speziellen Falle führen.

5. Ist der Pol der Ebene (hkl) ein Punkt des sekundären Hauptzonenkreises Q', dessen Symbol $[\bar{1}2\bar{1}]$, so muss

$$k = \frac{h+l}{2}$$

d. h. ein Index das arithmetische Mittel der beiden anderen sein. Die Ebenen (XII) gehen hiedurch in sechs über, deren Pole in den sekundären Hauptschnitten liegen.

6. Wird die Normale der Ebene (hkl) parallel den beiden Hauptschnitten T und Q', so muss der Pol dieser Ebene offenbar mit dem Pole $(10\bar{1})$ koindiziren und daher

$$h = -l, \; k = 0$$

sein. Das Schema (XII) repräsentirt uns dann die drei sekundären Hauptschnitte.

7. Liegt endlich der Pol der Ebene (hkl) in den beiden Hauptschnitten P und Q', so ist

$$h = k = l$$

und die Ebenen (XII) gehen in eine einzige über, nämlich in den basischen Hauptschnitt.

Wir hätten hier auch noch anzugeben, wie für die hemihexagonalen Systeme die Anzahl der gleichwerthigen Ebenen durch diese Spezialisirungen der Indices modifizirt wird. Allein diese Aufgabe, sowie überhaupt die nähere Untersuchung über die Lage, welche gleichwerthige Ebenen und Richtungen in den speziellen Fällen haben, brauchen wir nicht eigens vorzunehmen, indem sich beides vollkommen aus dem erkennen lässt, was wir über die Formen der hexagonalen Systeme zu sagen haben werden, wenn wir nur im letzteren Falle von der Voraussetzung absehen, dass die Indices rationale Grössen sein müssen.

§. 43. Holohexagonale Formen. A. Holoeder.

Gleichwerthige Ebenen und Richtungen des holohexagonalen Systems sind gegeben durch das Schema (XII), da in diesem Falle alle Hauptschnitte Ebenen der Symmetrie sind, so haben wir 7 Hauptaxen,

nämlich 6 rhombische, welche dem basischen Hauptschnitte parallel sind, und eine hexagonale parallel den primären und den sekundären Hauptschnitten. Letztere Hauptaxe ist, da nur eine einzige derartige vorhanden ist, eine morphologische Axe. Die rhombischen Hauptaxen, welche also zu Seitenaxen werden, zerfallen aber offenbar in zwei Gruppen unter sich gleichwerthiger Axen, von denen die einen die Durchschnitte des basischen Hauptschnittes mit den primären, die anderen jene mit den sekundären Hauptschnitten enthält; demgemäss unterscheiden wir auch zwischen primären und sekundären Seitenaxen. Dass es aber wirklich nur diese 7 Hauptaxen gibt, davon überzeugt man sich leicht durch die Fig. 130, indem der Endpunkt einer Hauptaxe der Durchschnittspunkt wenigstens zweier Hauptzonenkreise sein muss.

Sind nun h, k, l rationale, positive oder negative Grössen, so werden die Flächen (XII) in Verbindung mit den zu ihnen parallelen Flächen die allgemeinste holoedrische Form des eben betrachteten Systems geben, aus der wir durch die im vorhergehenden Paragraphe angegebene Spezialisirung der Indices, welche ja die Rationalität der letzteren nicht beeinträchtigt, die speziellen Formen der folgenden Aufzählung erhalten.

Hier bemerken wir noch, dass man in der Krystallographie unter Pyramiden Formen versteht, die aus zwei kongruenten geometrischen Pyramiden gebildet sind, so zwar, dass letztere sich mit entsprechenden Punkten ihrer Basis-Flächen berühren und ihre Spitzen nach entgegengesetzten Seiten kehren. Unter Basis einer krystallographischen Pyramide verstehen wir daher auch den Schnitt, welcher dieselbe in zwei kongruente geometrische Pyramiden theilt; dieser Schnitt wird natürlich durch Kanten der Pyramide gehen, welche desshalb Basiskanten heissen, im Gegensatze zu den übrigen Kanten der Pyramide, den Polkanten, die in den beiden Spitzen der Pyramide zusammentreffen. Pyramiden gleicher Basis sind solche, deren Basis ähnliche und ähnlich liegende, geometrische Figuren sind; man kann es natürlich durch Verschiebung der Flächen solcher Pyramiden dahin bringen, dass die Figuren auch gleich gross und somit kongruent werden, dann unterscheiden sich solche Pyramiden nur durch die Länge ihrer Axen, d. h. der Linien, welche die beiden Spitzen jeder Pyramide verbinden. Unter Prisma verstehen wir in der Krystallographie bekanntlich eine nur von tautozonalen Flächen begrenzte und somit offene Form. Schneidet man ein Prisma durch eine zu den Flächen desselben senkrechte Ebene, so heisst die Schnittfigur der Querschnitt des

Prisma. Ist letzteres der Gestalt und Lage nach ähnlich der Basis einer Pyramide, so nennt man das Prisma ein zu letzterer Pyramide gehöriges.

Mit Bezug auf die Flächenanzahl unterscheiden wir zwischen Dipyramiden, Pyramiden und Hemipyramiden, je nachdem dieselben auf jeder Seite ihrer Basis doppelt, eben so viel oder nur halb so viel Flächen haben, als die Anzahl der Hauptschnitte beträgt, welche auf der Basis senkrecht stehen. Dem entsprechend unterscheiden wir, nach der Art der zugehörigen Pyramiden zwischen Diprismen, Prismen und Hemiprismen.

Um Wiederholungen zu vermeiden, bemerken wir noch, dass bei allen folgenden Formen, welche geschlossen sind, die morphologische Axe durch die zwei hexagonalen Ecken dieser Formen geht. Diess gilt auch für die übrigen Abtheilungen des hexagonalen Systems.

1. Die Dipyramide $\{hkl\}$, Fig. 131, als allgemeinste Form, deren 24 Flächen durch das folgende Schema gegeben sind:

$$
\text{(XV)} \quad \ldots \left\{ \begin{array}{ccc}
hkl & lhk & klh \\
hlk & khl & lkh \\
efg & gef & fge \\
egf & feg & gfe \\
\bar{h}\bar{k}\bar{l} & \bar{l}\bar{h}\bar{k} & \bar{k}\bar{l}\bar{h} \\
\bar{h}\bar{l}\bar{k} & \bar{h}\bar{l}\bar{k} & \bar{l}\bar{k}\bar{h} \\
\bar{e}\bar{f}\bar{g} & \bar{g}\bar{e}\bar{f} & \bar{f}\bar{g}\bar{e} \\
\bar{e}\bar{g}\bar{f} & \bar{f}\bar{e}\bar{g} & \bar{g}\bar{f}\bar{e}
\end{array} \right. \qquad
\begin{array}{l}
e = -h + 2k + 2l \\
f = 2h - k + 2l \\
g = 2h + 2k - l
\end{array}
$$

Die Symbole dieser Flächen leiten sich aus dem einer einzigen, etwa (hkl), dadurch ab, dass man in den Symbolen dieser Fläche und der zu ihr inversen Fläche die Indices auf alle möglichen Arten permutirt, und schliesslich zu den so bestimmten zwölf Flächen noch durch Aenderung der Vorzeichen aller Indices die parallelen Flächen hinzufügt. Auch haben wir im vorhergehenden Paragraphe gesehen, welches die Vertheilung der Pole für die oberen Flächen (XV) auf der Sphäre der Projektion sein muss; ist $h > k > l$, also wenigstens der Index h positiv, so gibt uns Fig. 130 die relative Lage dieser Pole. Diese Regeln über die Ableitung der Symbole der Flächen und über die Bestimmung der Lage, welche die Pole dieser Flächen gegen einander haben werden, müssen natürlich auch noch für die folgenden speziellen Formen ihre Giltigkeit behalten.

Die Flächen der Dipyramide sind offenbar triklinisch und ihre Umrisse ungleichseitige Dreiecke; sie bilden 14 Ecken, von denen 2

zwölfflächig und hexagonal, 12 aber vierflächig und rhombisch sind. Von den letzteren sind nur immer die abwechselnden von gleicher Art, wie diess die Betrachtung der 36 Kanten lehrt, welche in 12 gleichwerthige Basiskanten (D) und in zwei Gruppen von je 12 gleichwerthigen Polkanten (G, F) zerfallen, je nachdem letztere in den primären oder sekundären Hauptschnitten liegen. Die Seitenaxen gehen durch die rhombischen Ecken, die krystallographischen Axenrichtungen (XX', YY', ZZ') aber durch Punkte der in den primären Hauptschnitten liegenden Polkanten (G). Die Basis, welche von den in basischen Hauptschnitten liegenden Kanten (D) gebildet wird, ist ein krystallographisches symmetrisches Zwölfeck.

Dadurch, dass man den Indices h, k, l verschiedene positive oder negative Werthe ertheilt, erhält man im Allgemeinen eine Reihe von Dipyramiden von verschiedenen Abmessungen; ausgenommen sind jedoch die folgenden speziellen Fälle, in welchen man wesentlich verschiedene Formen erhält. Unter den verschiedenen Dipyramiden gibt es natürlich auch solche mit gleicher Basis; die Bedingung aber, dass zwei Dipyramiden $\{hkl\}$ und $\{h'k'l'\}$ gleiche Basis haben, ist einfach die, dass je zwei korrespondirende Flächen derselben mit der Fläche (111) in einer Zone liegen, indem alsdann die beiden Pyramiden den basischen Hauptschnitt in parallelen Figuren schneiden. Da aber die Flächen (XV) sich ganz gleich gegen die Fläche (111) verhalten, so wird, wenn nur zwei korrespondirende Flächen zweier Dipyramiden mit (111) in einer Zone liegen, diess auch für die übrigen ihrer Flächen gelten müssen. Die zwei Flächen (hkl) und ($h'k'l'$) geben nun die Bedingung

$$h'(k-l)+k'(l-h)+l'(h-k)=0$$

welche erfüllt sein muss, sollen die beiden Dipyramiden $\{hkl\}$ und $\{h'k'l'\}$ gleiche Basis haben. Es ist klar, dass, wenn zwei solche Pyramiden in Kombination treten, die korrespondirenden Flächen derselben sich auch in Linien parallel dem basischen Hauptschnitte schneiden werden.

2. Das Diprisma $\{pqr\}$, Fig. 132, wenn $p+q+r=0$. Unter dieser Bedingung wird ersichtlich $e=-p$, $f=-q$, $g=-r$ und es fällt somit die zu jeder der direkten Flächen (XV) gehörige inverse mit der zu ersterer Fläche parallelen zusammen. Wir haben daher nur die zwölf Flächen

$$\begin{matrix} pqr & rpq & qrp \\ prq & qpr & rpq \\ \bar{p}\bar{q}\bar{r} & \bar{r}\bar{p}\bar{q} & \bar{q}\bar{r}\bar{p} \\ \bar{p}\bar{r}\bar{q} & \bar{q}\bar{p}\bar{r} & \bar{r}\bar{q}\bar{p} \end{matrix} \quad p+q+r=0$$

deren Pole sämmtlich in dem basischen Hauptzonenkreise liegen, indem für jede Fläche die Summe der Indices gleich Null ist. Das Diprisma ist also eine offene Form, deren 12 Flächen parallel der morphologischen Axe sind; es entsteht aus der Dipyramide durch Verschwinden der Basiskanten, was eben ein Zusammenfallen jeder Fläche derselben mit der anstossenden auf der entgegengesetzten Seite der Basis bedingt, Die Flächen dieser Form sind monoklinische, sie schneiden sich in 12 Kanten, die parallel der morphologischen Axe sind, und von denen je sechs gleichwerthig sind, je nachdem sie in den primären (G) oder in den sekundären Hauptschnitten (F) liegen.

Durch Punkte dieser Kanten gehen die entsprechenden Seitenaxen, die Axenrichtungen aber bloss durch Punkte der in den primären Hauptschnitten liegenden Kanten (G).

Da das Diprisma als eine Dipyramide mit unendlicher Axe aufgefasst werden kann, so hat man zur Bestimmung der Indices p, q, r eines zur Dipyramide $\{hkl\}$ gehörigen Diprisma offenbar die Gleichungen

$$p + q + r = 0$$
$$p\,(k - l) + q\,(l - h) + r\,(h - k) = 0$$

d. h. die Fläche (pqr) muss in den beiden Zonen T und $[(111)\,(hkl)]$ liegen. Hieraus findet man

$$p = k + l - 2h,\quad q = l + h - 2k,\quad r = h + k - 2l$$

welche uns also das Diprisma bestimmen, das den basischen Hauptschnitt in denselben Linien wie die Dipyramide $\{hkl\}$ schneidet. Dieses Diprisma ist auch dasjenige, in welches die Dipyramide $\{hkl\}$ übergeht, wenn ihre morphologische Axe unendlich wird. Treten beide Formen in Kombination, so werden offenbar die Basiskanten der Dipyramide von den Flächen des zugehörigen Diprisma gerade abgestumpft.

3. Die Protopyramide $\{hkk\}$, Fig. 133. Werden in dem Schema der Flächen (XV) zwei der Indices, etwa k und l, gleich gross, so reduziren sich dieselben auf die folgenden zwölf:

$$\begin{array}{lll} hkk & khk & kkh \\ eff & fef & ffe \\ \bar{h}\bar{k}\bar{k} & \bar{k}\bar{h}\bar{k} & \bar{k}\bar{k}\bar{h} \\ \overline{eff} & \overline{fef} & \overline{ffe} \end{array} \qquad \begin{array}{l} e = -\;h + 4k \\ f = g = \;2h + k \end{array}$$

deren Pole sämmtlich in den primären Hauptschnitten liegen und die in Fig. 130 angegebene Lage haben, wenn, wie wir diess immer voraussetzen, $h > k$, also die Fläche (hkk) dem Dreiecke $(111)(2\bar{1}\bar{1})(11\bar{2})$ angehört. Ist $h > k$, so muss den angegebenen Werthen zufolge $e < f$

sein, woraus man auch ersieht, dass, je nachdem in dem Symbole irgend einer Fläche die zwei kleineren oder die zwei grösseren Indices einander gleich werden, der Pol dieser Fläche in dem betreffenden primären Hauptzonenkreise entweder auf derselben oder auf der entgegengesetzten Seite vom Pole (111) liegt, wie der Pol der in dieser Zone liegenden Axenebene.

Die Form, welche von den obigen 12 Flächen gebildet wird, entsteht aus der Dipyramide durch Verschwinden der Kanten G, d. h. dadurch, dass je zwei anstossende Flächen, die auf derselben Seite der Basis rechts und links von einem primären Hauptschnitte liegen, in eine einzige übergehen, deren Pol natürlich in dem betreffenden primären Hauptzonenkreise liegen muss. Die Flächen dieser Form sind also monoklinische und ihre Umrisse gleichschenklige Dreiecke. Dieselben bilden 8 Ecken, worunter 2 sechsflächige hexagonale und 6 vierflächige rhombische; durch die letzteren gehen die sekundären Seitenaxen. Unter den 18 Kanten sind 12 gleichwerthige Polkanten (F), welche in den sekundären Hauptschnitten liegen und 6 gleichwerthige Basiskanten (D), durch deren Mittelpunkte die zu ihnen senkrechten primären Seitenaxen gehen. Die Axenrichtungen schneiden die Form in Punkten der direkten Flächen.

Es ist klar, dass die verschiedenen Varietäten von Protopyramiden welche dadurch entstehen, dass man dem Verhältnisse $h : k$ verschiedene Werthe ertheilt, alle von gleicher Basis sind, da ja die Pole ihrer Flächen immer in den primären Hauptschnitten liegen. Die Basis dieser Pyramiden ist aber ein krystallographisches reguläres Sechseck, dessen Seiten (D) parallel den sekundären Seitenaxen sind.

4. Das Protoprisma $\{2\bar{1}\bar{1}\}$, Fig. 134, welches aus der vorhergehenden Form durch Verschwinden der Basiskanten (D) entsteht. Es ist offenbar das zu den Protopyramiden gehörige Prisma und natürlich eine offene Form. Die 6 Flächen desselben

$$2\bar{1}\bar{1} \quad \bar{1}2\bar{1} \quad \bar{1}\bar{1}2$$
$$\bar{2}11 \quad 1\bar{2}1 \quad 11\bar{2}$$

sind sämmtlich parallel der morphologischen Axe und sind senkrecht zu den primären Nebenaxen, sie sind daher rhombische Flächen. Die sechs gleichwerthigen Kanten (F) liegen in den sekundären Hauptschnitten, durch Punkte derselben gehen die sekundären Seitenaxen. Die krystallographischen Axenrichtungen gehen jedoch durch solche Punkte der Flächen, welche zwischen je zwei Kanten in der Mitte liegen. Der Querschnitt ist natürlich ein reguläres Sechseck, dessen Seiten parallel den sekundären Nebenaxen sind.

5. Die Deuteropyramide $\{hil\}$, Fig. 135, wenn einer der Indices das arithmetische Mittel der beiden anderen, also bei der Annahme $h > i > l$ der Index $i = {}^1/_2\,(h + l)$ ist. Hiedurch wird $e = h$, $f = i$, $g = h$ und die Flächen (XV) gehen in die folgenden zwölf über:

$$\begin{matrix} hil & lhi & ilh \\ hli & ihl & lih \\ h\bar{i}\bar{l} & \bar{l}h\bar{i} & \bar{i}\bar{l}h \\ h\bar{l}\bar{i} & \bar{i}h\bar{l} & \bar{l}\bar{i}h \end{matrix} \qquad i = \frac{h+l}{2}$$

deren Pole sämmtlich in den sekundären Hauptzonenkreisen liegen, Fig. 130. Die von diesen Flächen gebildete Form entsteht also aus der Dipyramide durch Verschwinden der Polkanten F, wodurch jede direkte Fläche derselben mit der anstossenden inversen auf derselben Seite des basischen Hauptschnittes zusammenfällt.

Die 12 Flächen dieser Form sind senkrecht zu den sekundären Hauptschnitten und daher monoklinische Flächen, deren Umrisse gleichschenklige Dreiecke sind. Die 8 Ecken zerfallen in 2 sechsflächige hexagonale und in 6 vierflächige rhombische; die 18 Kanten aber in 12 gleichwerthige Polkanten (G) und in 6 gleichwerthige Basiskanten (D). Durch die Mittelpunkte der letzteren gehen die sekundären Seitenaxen, während die primären durch die rhombischen Ecken gehen. Die krystallographischen Axenrichtungen schneiden diese Form in Punkten abwechselnder Polkanten. Wie bei den Protopyramiden sind auch alle Varietäten der Deuteropyramiden von gleicher Basis, welche ein krystallographisches reguläres Sechseck mit zu den primären Seitenaxen parallelen Seiten ist, und die sich daher von der Basis der Protopyramiden nur durch ihre um 30° gedrehte Stellung unterscheidet. Ueberhaupt können diese zwei Arten von Pyramiden, sobald es sich um eine einzeln auftretende Form handelt, nicht von einander unterschieden werden. Etwas anderes ist es jedoch, wenn man weiss, dass die fragliche Pyramide einer bestimmten Krystallreihe angehört, wo sich dann die zwei Arten theils durch ihre Winkel, theils ihre physikalischen Eigenschaften unterscheiden.

6. Das Deuteroprisma $\{10\bar{1}\}$, Fig. 136. Es ist diess eine Deuteropyramide mit unendlicher morphologischer Axe und somit eine offene Form. Fügt man nämlich zur Bedingung $k = {}^1/_2\,(h + l)$ noch die hinzu, dass $h + k + l = 0$, so erhält man $k = 0$, $l = -h$ und die Flächen (XV) reduziren sich auf die folgenden sechs:

$$\begin{matrix} 10\bar{1} & 0\bar{1}1 & \bar{1}10 \\ \bar{1}01 & 01\bar{1} & 1\bar{1}0 \end{matrix}$$

welche senkrecht stehen auf den sekundären Nebenaxen und somit der morphologischen Axe parallel sind. Die 6 Flächen dieser Form sind also rhombische, ihre Kanten (G) liegen in den primären Hauptschnitten, und durch Punkte dieser Kanten gehen die primären Seitenaxen, sowie die Axenrichtungen. Der Querschnitt dieses Prisma ist offenbar ein regelmässiges Sechseck von gleicher Lage wie die Basis der Deuteropyramide, aber gegen den Querschnitt des Protoprisma um 30° gedreht.

7. Das Pinakoid $\{111\}$ besteht bloss aus den zwei dem basischen Hauptschnitte parallelen Flächen

$$111,\ \bar{1}\bar{1}\bar{1}$$

wie man sich leicht überzeugt, wenn man in den Flächen (XV) die Substitution $h = k = l$ vornimmt. Diese zwei Flächen stehen senkrecht auf der morphologischen Axe und sind daher hexagonal; sie bilden natürlich nur eine offene Form, welche in den Fig. 132, 134, 136 dazu verwendet wurde, die ebenfalls offenen Prismen zu schliessen.

§. 44. Holohexagonale Formen. B. Hemieder.

Von den 24 Flächen der Dipyramide lassen sich auf dreierlei Art zwölf auswählen, unter welchen keine parallelen sind, und deren Anordnung für gleichwerthige Hauptschnitte eine ähnliche ist. Demzufolge sind also dreierlei Arten von Hemiedern möglich, die mit ihren speziellen Fällen, so weit sich letztere von den holoedrischen Formen unterscheiden, in der nachfolgenden Aufzählung enthalten sind.

Erste Art der Hemiedrie.

8. Das Ditrapezoeder $\varkappa\{hkl\}$ oder $\varkappa\{hlk\}$. Die folgenden 12 Flächen der Dipyramide

$$\left.\begin{matrix} hkl & lhk & klh \\ efg & gef & fge \\ \bar{h}\bar{l}\bar{k} & \bar{k}\bar{h}\bar{l} & \bar{l}\bar{k}\bar{h} \\ \bar{e}\bar{g}\bar{f} & \bar{f}\bar{e}\bar{g} & \bar{g}\bar{f}\bar{e} \end{matrix}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(XVI)}$$

geben die Form $\varkappa\{hkl\}$, Fig. 137. Die Flächen der korrelaten rechten Form $\varkappa\{hlk\}$ erhält man, indem man in diesem Schema k mit l und f mit g vertauscht. Je zwei korrelate Ditrapezoeder sind aber enantiomorph, wie man sich mit Hilfe der Fig. 130 überzeugt. Dreht man nämlich eine der zwei Formen um die morphologische Axe, und zwar immer in demselben Sinne, so hat man um ungleiche Winkel zu drehen,

je nachdem man die oberen oder unteren Flächen der zwei korrelaten Formen zur Deckung bringen will.

Das Ditrapezoeder ist also von 12 triklinischen Flächen begrenzt, deren Umrisse Trapezoide mit zwei anliegenden gleichen Seiten sind. Von den 14 Ecken sind 2 sechsflächig und hexagonal, 12 aber dreiflächig und triklinisch; die 36 Kanten zerfallen in 12 gleichwerthige Polkanten (L) und in zwei Gruppen von je 6 gleichwerthigen Seitenkanten (M, N). Diese Seitenkanten sind verschieden, je nachdem durch ihre Mittelpunkte eine primäre oder sekundäre Seitenaxe geht, die Axenrichtungen gehen durch unsymmetrisch gelegene Punkte der direkten Flächen.

Bei dieser Art der Hemiedrie, in Betreff welcher wir noch auf das im §. 29 über die Enantiomorphie Gesagte verweisen, erhalten wir durch die bekannte Spezialisirung der Indices keine neuen, von den schon abgehandelten Holoedern verschiedenen Formen.

Zweite Art der Hemiedrie.

9. Die protosphenoidische Pyramide $\chi\{hkl\}$ oder $\chi\{efg\}$; dem ersteren Symbole, Fig. 138, entsprechen die 12 Flächen

$$(\text{XVII}) \quad \ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{ccc} hkl & lhk & klh \\ hlk & khl & lkh \\ \overline{efg} & \overline{gef} & \overline{fge} \\ \overline{egf} & \overline{feg} & \overline{gfe} \end{array} \right.$$

der allgemeinsten holoedrischen Form. Die übrigen zwölf Flächen der letzteren Form erhält man, indem man in diesem Schema die Indices h, k, l und e, f, g mit einander vertauscht. Die Flächen (XVII) entsprechen alsdann dem Symbole $\chi\{efg\}$, welches also das mit $\chi\{hkl\}$ korrelate Hemieder vorstellt. Ersichtlich sind für zwei solche korrelate Formen die Flächen der einen die inversen der Flächen der anderen Form, woraus auch sogleich folgt, dass solche zwei Formen in geometrischer Hinsicht identisch werden müssen, wenn man die eine derselben um die morphologische Axe um 180° herumdreht. Diess muss folglich auch für je zwei korrelate spezielle Formen gelten, die nach dieser Hemiedrie abgeleitet sind, und die man nach Art ihres Symboles als direkte und inverse wird unterscheiden können.

Die gegenwärtige Form nun ist begrenzt von 12 ungleichseitigen Dreiecken, welche triklinische Flächen sind und 8 Ecken bilden, von denen 2 sechsflächig und hexagonal, 6 aber vierflächig und rhombisch sind. Letztere sind zweierlei Art, indem nur die abwechselnden gleich

weit vom Mittelpunkte der Form entfernt sind; durch je zwei ungleichartige dieser Flächen gehen aber die primären Seitenaxen. Von den 18 Kanten sind die 6 Basiskanten (D) und je 6 Polkanten (G, E) gleichwerthig, beide Arten der letzteren liegen in den primären Hauptschnitten, und durch Punkte ungleichartiger dieser Kanten gehen die Axenrichtungen hindurch; durch Punkte der Basiskanten aber die sekundären Seitenaxen.

Die Basis dieser Form ist ein krystallographisches symmetrisches Sechseck, je zwei korrelate Formen haben zur Basis ähnliche Sechsecke, welche aber gerade entgegengesetzte Lage haben. Handelt es sich darum, dass verschiedene Varietäten dieser Form von gleicher Basis seien, so werden wir offenbar dieselbe Bedingung für die Indices dieser Formen haben, welche wir für diesen Fall bei der Dipyramide entwickelten. Wird die morphologische Axe dieser Form unendlich, so erhalten wir

10. das protosphenoidische Prisma $\varkappa\{pqr\}$ oder $\varkappa\{\bar{p}\bar{q}\bar{r}\}$, wenn $p + q + r = 0$, als Hemieder des Diprisma und natürlich eine offene Form. Das Prisma $\varkappa\{pqr\}$, Fig. 139 ist begrenzt von den 6 Flächen

$$\begin{matrix} pqr & rpq & qrp \\ prq & qpr & rqp \end{matrix} \quad p + q + r = 0$$

auf welche sich die Flächen (XVII) reduziren, da zufolge der letzten Bedingungsgleichung $e = -p$, $f = -q$, $g = -r$ wird.

Die 6 Flächen dieser Form nun sind monoklinische und sämmtlich parallel der morphologischen Axe. Sie bilden 6 Kanten zweierlei Art (G, E), welche aber sämmtlich in den primären Hauptschnitten liegen; durch je zwei ungleichartige dieser Kanten gehen die primären Seitenaxen und die krystallographischen Axenrichtungen. Der Querschnitt ist ersichtlich ein krystallographisches symmetrisches Sechseck und ist mit Ausnahme der gerade entgegengesetzten Lage für je zwei korrelate Formen gleich. Für dasjenige protosphenoidische Prisma, welches zu einer eben solchen Pyramide gehört, haben wir natürlich dieselbe Bedingung wie für die entsprechenden Holoeder.

11. Die Protohemipyramide $\varkappa\{hkk\}$ oder $\varkappa\{eff\}$, d. i. die der Protopyramide entsprechende hemiedrische Form. Durch die Substitution $k = l$ erhalten wir aus dem Schema (XVII) als Flächen der Form $\varkappa\{hkk\}$, Fig. 140, die folgenden 6:

$$\begin{matrix} hkk & khk & kkh \\ \overline{eff} & \overline{fef} & \overline{ffe} \end{matrix}$$

deren Pole in dem primären Hauptzonenkreise auf derselben Seite vom Pole (111) wie die Pole der Axenebenen liegen. Die Pole der korre-

laten Form $\varkappa\{eff\}$ entfallen offenbar auf die entgegengesetzten Seiten dieser Zonenkreise.

Da der innere Neigungswinkel je zweier unter einander stehender dieser 6 Flächen von dem basischen Hauptschnitte halbirt wird, so ist die gegenwärtige Form offenbar eine dreiseitige Pyramide, die zur Basis ein krystallographisches gleichseitiges Dreieck hat. Die Seiten des letzteren sind zwar immer senkrecht zu den primären Seitenaxen, dasselbe kann jedoch zwei gerade entgegengesetzte Lagen haben, und für zwei korrelate Formen wird diess immer der Fall sein. Alle Varietäten der eben betrachteten Form zerfallen daher in zwei Gruppen, deren jede nur Pyramiden gleicher Basis enthält.

Die 6 Flächen einer Protohemipyramide sind monoklinische und ihre Umrisse gleichschenklige Dreiecke; dieselben bilden 5 Ecken und 9 Kanten. Von den ersteren sind 2 dreiflächig und hexagonal, 3 aber vierflächig und rhombisch. Von den Kanten sind die 3 Basiskanten (D) und die 6 Polkanten (E) gleichwerthig. Die Basiskanten sind parallel den sekundären Seitenaxen, durch ihre Mittelpunkte und die gegenüber liegenden rhombischen Ecken gehen die primären Seitenaxen; die Polkanten liegen in den primären Hauptschnitten, durch drei derselben und durch die entgegengesetzten Flächen gehen die Axenrichtungen. Für die Form $\varkappa\{hkk\}$ sind diess die drei oberen, für $\varkappa\{eff\}$ die drei unteren Flächen. Wird die morphologische Axe zweier solcher korrelaten Formen unendlich, so erhalten wir die zu ihnen gehörigen nachfolgenden zwei Hemiprismen.

12. Das P r o t o h e m i p r i s m a, von dem es nur zwei korrelate Varietäten, nämlich $\varkappa\{2\bar{1}\bar{1}\}$, Fig. 141, mit den Flächen

$$2\bar{1}\bar{1},\ \bar{1}2\bar{1},\ \bar{1}\bar{1}2$$

und $\varkappa\{\bar{2}11\}$ mit den zu den früheren parallelen Flächen

$$\bar{2}11\quad 1\bar{2}1\quad 11\bar{2}$$

gibt. Jede dieser offenen Formen ist also gebildet von drei zu den primären Seitenaxen senkrechten und somit rhombischen Flächen, welche alle der morphologischen Axe parallel sind. Die drei Kanten (E) liegen in den primären Hauptschnitten, und durch je einen Punkt einer Kante und der gegenüberliegenden Fläche gehen die primären Seitenaxen und die Axenrichtungen. Die Querschnitte dieser zwei korrelaten Formen sind krystallographische gleichseitige Dreiecke von entgegengesetzter Lage; die Seiten derselben sind senkrecht zu den primären Nebenaxen.

Die übrigen Spezialisirungen der Indices bringen keine von den entsprechenden Holoedern verschiedenen hemiedrischen Formen hervor, wie man sich leicht mit Hilfe des Schema (XVII) überzeugt.

Dritte Art der Hemiedrie.

13. Die deuterosphenoidische Pyramide $\gamma\{hkl\}$ oder $\gamma\{hlk\}$; die dem ersteren Symbole entsprechende Form, Fig. 142, wird durch die folgenden 12 Flächen der Dipyramide gebildet:

$$\left.\begin{matrix} hkl & lhk & klh \\ gfe & feg & egf \\ h\bar{l}\bar{k} & \bar{k}h\bar{l} & \bar{l}\bar{k}h \\ \bar{f}\bar{g}\bar{e} & \bar{g}\bar{e}\bar{f} & \bar{e}\bar{f}\bar{g} \end{matrix}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(XVIII)}$$

Man überzeugt sich leicht durch Betrachtung der Fig. 130, dass die Flächen dieser Form sich gerade so zu den sekundären Hauptschnitten verhalten, wie die Flächen der protosphenoidischen Pyramide sich zu den primären Hauptschnitten verhalten. Diese beiden Formen werden sich daher, abgesehen von ihren verschiedenen Winkeln, hauptsächlich nur durch ihre um 30^0 verschiedene Stellung unterscheiden. Dasselbe wird aber auch für die aus beiden Formen abgeleiteten speziellen Hemieder gelten müssen. Wir werden überhaupt nur dann berechtigt sein, einen Unterschied zwischen beiderlei Formen zu machen, sobald sie an Krystallen ein und derselben Substanz auftreten. Treffen wir an denselben Krystallen aber immer nur eine Art dieser Formen, so können wir dieselbe, da die Wahl der primären Hauptschnitte beliebig ist, stets als Formen der vorhergehenden Reihe auffassen. Da nun letzteres wohl der Fall der Natur sein dürfte, so wollen wir uns mit einer kurzen Aufzählung der hieher gehörigen Formen begnügen, welche sich ja in geometrischer Hinsicht von den vorhergehenden nur durch ihre Drehung um 30^0 unterscheiden.

14. Das deuterosphenoidische Prisma $\gamma\{pqr\}$ oder $\gamma\{prq\}$, wenn $p + q + r = 0$. Das erstere, Fig. 143, besteht aus den 6 zur morphologischen Axe parallelen Flächen

$$\begin{matrix} pqr & rpq & qrp \\ \bar{p}\bar{r}\bar{q} & \bar{q}\bar{p}\bar{r} & \bar{r}\bar{q}\bar{p} \end{matrix} \quad p + q + r = 0$$

15. Die Deuterohemipyramide $\gamma\{hil\}$ oder $\gamma\{hli\}$, wenn $2i = h + l$. Die Flächen der ersteren Form Fig. 144 sind

$$\begin{matrix} hkl & lhk & klh \\ h\bar{l}\bar{k} & \bar{k}h\bar{l} & \bar{l}\bar{k}h \end{matrix} \quad i = \frac{h + l}{2}$$

16. **Das Deuterohemiprisma**, von welchem nur die zwei korrelaten Varietäten: $\gamma\{10\bar{1}\}$, Fig. 145, mit den Flächen

$$10\bar{1} \quad \bar{1}10 \quad 0\bar{1}1$$

und $\gamma\{1\bar{1}0\}$ mit den parallelen Flächen

$$1\bar{1}0 \quad 01\bar{1} \quad \bar{1}01$$

möglich sind.

§. 45. Protohemihexagonale oder rhomboedrische Formen. A. Holoeder.

Bei dieser Art der Hemisymmetrie, für welche die gleichwerthigen Ebenen durch das Schema (XIII) repräsentirt werden, sind nur die primären Hauptschnitte Ebenen der Symmetrie; die morphologische Axe ist also in diesem Falle eine trigonale, während die primären Nebenaxen des holohexagonalen Systems, indem sie zu monoklinischen Axen werden, aufhören, Hauptaxen zu sein. Die sekundären Seitenaxen bleiben jedoch als hemirhombische auch jetzt noch Hauptaxen, welche wir auch immer meinen, wenn bei den rhomboedrischen Formen von Seitenaxen gesprochen wird. Sind nun h, k, l rationale Grössen, so gibt uns das Schema (XIII) als allgemeinsten rhomboedrischen Holoeder:

1. Das Skalenoeder $\varkappa\{hkl\}$ oder $\varkappa\{efg\}$. Die dem ersteren Symbole entsprechende Form Fig. 146 ist gebildet von den 12 Flächen

$$\text{(XIX)} \quad \ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{ccc} hkl & lhk & klh \\ hlk & khl & lkh \\ \bar{h}\bar{k}\bar{l} & \bar{l}\bar{h}\bar{k} & \bar{k}\bar{l}\bar{h} \\ \bar{h}\bar{l}\bar{k} & \bar{k}\bar{h}\bar{l} & \bar{l}\bar{k}\bar{h} \end{array} \right.$$

Setzt man in diesem Schema für h, k, l die durch die Gleichungen (X) gegebenen Grössen e, f, g, so erhält man die Flächen des korrelaten Skalenoeders $\varkappa\{efg\}$, dessen Flächen mit denen des ursprünglichen zusammen offenbar den Flächenkomplex der Dipyramide geben. Je zwei korrelate Skalenoeder unterscheiden sich ersichtlich als ein direktes und ein inverses, indem das eine bloss aus direkten, das andere bloss aus inversen Flächen bestehen wird. Hieraus folgt auch, dass je zwei solche korrelate Formen durch Drehung der einen um die morphologische Axe um 180° in geometrischer Hinsicht identisch werden. Diese Bemerkungen gelten natürlich auch noch für je zwei korrelate Formen, die durch Spezialisirung der Indices aus dieser allgemeinen Form abgeleitet sind. Für einige dieser speziellen Formen finden wir jedoch, dass die korrelaten direkten und inversen Formen identisch

sind. Solche Formen müssen daher dieselbe Flächenanzahl wie die entsprechenden holohexagonalen Holoeder haben, von denen sie sich zwar nicht in geometrischer Hinsicht, aber mit Bezug auf ihre Symmetrieverhältnisse wesentlich unterscheiden werden.

Die 12 Flächen des Skalenoeders sind triklinisch und haben die Gestalt ungleichseitiger Dreiecke; dieselben bilden 8 Ecken, nämlich 2 sechsflächige trigonale und 6 vierflächige monoklinische, welche letztere in den primären Hauptschnitten liegen. Von den 18 Kanten sind die in den primären Hauptschnitten liegenden 12 Polkanten ($\acute{E}$, G) zweierlei Art, indem immer die abwechselnden gleichwerthig sind; die übrigen 6 Seitenkanten (N), durch deren Mittelpunkte die Seitenaxen gehen, sind ebenfalls gleichwerthig. Die Axenrichtungen gehen durch Punkte einer Art der Polkanten. Wird in zwei korrelaten Skalenoedern die morphologische Axe unendlich lang, d. h. werden die Polkanten einander parallel, so gehen beide, wie man sich leicht überzeugt, in die nachfolgende spezielle Form über.

2. Das **rhomboedrische Diprisma** $\varkappa\{pqr\}$, Fig. 14, wenn $p+q+r=0$, mit den 12 Flächen

$$\begin{matrix} pqr & rpq & qrp \\ prq & qpr & rqp \\ \bar{p}\bar{q}\bar{r} & \bar{r}\bar{p}\bar{q} & \bar{q}\bar{r}\bar{p} \\ \bar{p}\bar{r}\bar{q} & \bar{q}\bar{p}\bar{r} & \bar{r}\bar{q}\bar{p} \end{matrix} \quad p+q+r=0$$

und also in geometrischer Hinsicht identisch mit dem holohexagonalen Diprisma; die Flächen der gegenwärtigen Form sind aber triklinische. Ihre 12 Kanten sind parallel der morphologischen Axe und zu je 6 gleichwerthig, je nachdem sie in den primären oder sekundären Hauptschnitten liegen. Durch Punkte der ersteren (G) gehen die Axenrichtungen durch Punkte der letzteren (N) aber die Seitenaxen.

Der Querschnitt, welcher natürlich eine trigonale Ebene sein muss, ist ein symmetrisches Zwölfeck von scheinbar hexagonalem Charakter, indem die parallelen Seiten auch gleichwerthig sind. Letzteres ist aber nur der Fall, weil sie von parallelen Flächen gebildet werden, die senkrecht auf dem Querschnitte stehen.

3. Das **Rhomboeder** $\varkappa\{hkk\}$ oder $\varkappa\{eff\}$. Die Flächen des Schema (XIX) reduziren sich für die Substitution $k=l$ auf die folgenden 6:

$$\begin{matrix} hkk & khk & kkh \\ \bar{h}\bar{k}\bar{k} & \bar{k}\bar{h}\bar{k} & \bar{k}\bar{k}\bar{h} \end{matrix}$$

welche das direkte Rhomboeder $\varkappa\{hkk\}$, Fig. 148 geben. Die Pole

dieser sechs Flächen fallen in die primären Hauptzonenkreise, und zwar auf dieselbe Seite von (111), wie die Pole der Axenebenen; für die Flächen eines inversen Rhomboeders fallen die Pole jedoch auf die entgegengesetzte Seite.

Die 6 Flächen jedes Rhomboeders sind also monoklinisch und ihre Umrisse Rhomben, deren eine Diagonale parallel dem basischen Hauptschnitte ist, während die andere Diagonale in einem der primären Hauptschnitte liegt. Die Flächen bilden 8 Ecken, nämlich 2 dreiflächige trigonale und 6 dreiflächige monoklinische, welche in den primären Hauptschnitten liegen. Die letzteren Ecken werden durch 6 gleichwerthige Seitenkanten (N) verbunden, durch deren Mittelpunkte die Seitenaxen gehen. Die übrigen 6 Polkanten (F), die sämmtlich in den primären Hauptschnitten liegen, sind ebenfalls gleichwerthig. Ueberhaupt haben die 12 Kanten nur dreierlei verschiedene Richtungen, da sie ja die Durchschnitte nur dreier ihrer Richtung nach verschiedener Flächen sind. Je vier der Kanten sind also parallel. Die krystallographischen Axenrichtungen gehen bei den direkten Rhomboedern durch Punkte ihrer in den primären Hauptschnitten liegenden Flächendiagonalen, bei den inversen Rhomboedern aber durch Punkte ihrer Polkanten.

Wird in dem allgemeinen Symbole $\varkappa\{hkk\}$ der Index $k = 0$, so erhält man das direkte Rhomboeder $\varkappa\{100\}$, dessen Flächen den Axenebenen und dessen Kanten den Axenrichtungen parallel sind. Ist der Neigungswinkel der Flächen eines Rhomboeders gleich 90°, so ist dasselbe offenbar ein reguläres Hexaeder. Man nennt nun bisweilen auch ein Rhomboeder stumpf oder spitz, je nachdem dessen morphologische Axe kürzer oder länger als die eines Hexaeders ist.

Wird die morphologische Axe zweier korrelater Rhomboeder unendlich lang, so gehen beide in die folgende Form über:

4. Das rhomboedrische Protoprisma $\varkappa\{2\bar{1}\bar{1}\}$, Fig. 149, welches dem Schema (XIX) zufolge aus den folgenden sechs vollkommen bestimmten Flächen

$$\begin{matrix} 2\bar{1}\bar{1} & \bar{1}2\bar{1} & \bar{1}\bar{1}2 \\ \bar{2}11 & 1\bar{2}1 & 11\bar{2} \end{matrix}$$

besteht. Diese offene Form ist also in geometrischer Hinsicht identisch mit der entsprechenden holohexagonalen, von welcher sie sich jedoch durch den monoklinischen Charakter ihrer Flächen unterscheidet. Die 6 der morphologischen Axe parallelen Kanten (N) sind gleichwerthig und liegen in den sekundären Hauptschnitten, durch Punkte derselben gehen die zu ihnen senkrechten Seitenaxen. Die Axenrichtungen gehen

durch Punkte der Flächen. Der Querschnitt ist ein regelmässiges Sechseck, dessen Seiten auf den primären Hauptschnitten senkrecht stehen und das scheinbar einen hexagonalen Charakter hat.

5. Die rhomboedrische Deuteropyramide $\varkappa\{hil\}$, Fig. 150, wenn $2i = h + l$, besteht aus den 12 Flächen

$$\begin{matrix} hil & lhi & ilh \\ hli & ihl & lih \\ h\bar{i}\bar{l} & \bar{l}h\bar{i} & \bar{i}\bar{l}h \\ h\bar{l}\bar{i} & \bar{i}\bar{h}l & \bar{l}\bar{i}h \end{matrix} \qquad i = \frac{h+l}{2}$$

und stimmt also in geometrischer Hinsicht mit der holohexagonalen Form überein. Die Unterschiede in den Symmetrieverhältnissen sind die folgenden:

Die Flächen, deren Pole in die sekundären Hauptzonenkreise fallen, sind triklinisch, ihre Umrisse gleichschenklige Dreiecke. Dieselben bilden 8 Ecken, unter welchen 2 sechsflächige trigonale und 6 vierflächige monoklinische, welche in den primären Hauptschnitten liegen. Von den 18 Kanten sind die 6 Basiskanten (N) und je 6 der übrigen Polkanten (E, G) gleichwerthig. Die Polkanten liegen sämmtlich in den primären Hauptschnitten und sind, wie gesagt, abwechselnd gleichwerthig; durch Punkte einer Art derselben (G) gehen die Axenrichtungen, während die Seitenaxen durch die Mittelpunkte der Basiskanten gehen. Die verschiedenen Variäteten dieser Formen sind natürlich alle von gleicher Basis, die ein krystallographisches reguläres Sechseck ist mit zu den Nebenaxen senkrechten Seiten. Für eine unendlich lange morphologische Axe geht diese Form in das zugehörige nachfolgende Prisma über.

6. Das rhomboedrische Deuteroprisma $\varkappa\{10\bar{1}\}$, Fig. 151, mit den 6 Flächen

$$\begin{matrix} 10\bar{1} & 0\bar{1}1 & \bar{1}10 \\ \bar{1}01 & 01\bar{1} & 1\bar{1}0 \end{matrix}$$

welche senkrecht zu den Nebenaxen und daher hemirhombische Flächen sind. Hiedurch unterscheidet sich diese Form von der entsprechenden holohexagonalen. Die 6 der morphologischen Axe parallelen Kanten sind gleichwerthig (G), und durch Punkte derselben gehen die Axenrichtungen. Der Querschnitt ist ein reguläres Sechseck, dessen Seiten parallel den primären Hauptschnitten sind, und das gegen den Querschnitt des Protoprisma eine um 30° gedrehte Lage hat.

7. Das rhomboedrische Pinakoid $\varkappa\{111\}$, welches bloss aus den zwei Flächen



$$111 \quad \bar{1}\bar{1}\bar{1}$$

besteht. Da dieselben senkrecht auf der morphologischen Axe stehen, so sind sie trigonale Flächen.

§. 46. Protohemihexagonale oder rhomboedrische Formen. B. Hemieder.

Wenn wir, um die hemiedrischen Formen des rhomboedrischen Systems kennen zu lernen, solche sechs der Flächen (XIX) aufsuchen, unter denen keine parallelen sind, und welche mit Bezug auf gleichwerthige Hauptschnitte dieselbe Anordnung haben, so finden wir, dass diess nur auf eine einzige Art möglich ist, die derjenigen entspricht, welche wir bei den holohexagonalen Formen als erste Art der Hemiedrie kennen gelernt haben. Indem wir nun auch die speziellen rhomboedrischen Formen dieser Hemiedrie unterwerfen, finden wir, dass das Rhomboeder, das rhomboedrische Protoprisma und Pinakoid hiedurch nicht geändert werden, und dass wir als wesentlich neue rhomboedrische Formen nur die folgenden erhalten.

8. Das Trapezoeder $\varkappa\varkappa\{hkl\}$, $\varkappa\varkappa\{hlk\}$, $\varkappa\varkappa\{efg\}$, $\varkappa\varkappa\{egf\}$. Dem ersten Symbole $\varkappa\varkappa\{hkl\}$, Fig. 152, entsprechen die 6 Flächen

$$(XX) \dots\dots\dots \left\{ \begin{matrix} hkl & lhk & klh \\ \bar{h}\bar{l}\bar{k} & \bar{k}\bar{h}\bar{l} & \bar{l}\bar{k}\bar{h} \end{matrix} \right.$$

welche abwechselnd linke Flächen eines direkten Skalenoeders sind. Die übrigen Flächen des letzteren entsprechen den Flächen des korrelaten rechten Trapezoeders $\varkappa\varkappa\{hlk\}$. Solche zwei Trapezoeder können aber nicht durch Drehung in parallele Stellung gebracht werden und sind daher enantiomorph; denn drehen wir das Skalenoeder, Fig. 146, um die morphologische Axe, bis die Fläche (hlk) mit (hkl) zusammenfällt, so kann alsdann nicht auch die Fläche $(\bar{l}\bar{h}\bar{k})$ mit $(\bar{l}\bar{k}\bar{h})$ koindiziren, da ja die Neigung der letzteren zwei Flächen eine andere als die der zwei ersteren ist. Setzt man statt h, k, l die durch die Gleichungen (X) gegebenen Grössen e, f, g, so erhält man aus den früheren zwei Trapezoedern zwei korrelate inverse $\varkappa\varkappa\{efg\}$, $\varkappa\varkappa\{egf\}$, die unter sich enantiomorph sind, sich von den direkten aber durch die um 180° gedrehte Stellung unterscheiden.

Die 6 Flächen jedes Trapezoeders sind triklinisch, ihre Umrisse sind Trapezoide mit zwei gleichen anliegenden Seiten. Von den 8 Ecken sind 2 dreiflächig und trigonal, 6 aber dreiflächig und triklinisch. Unter den 12 Kanten sind 6 gleichwerthige Polkanten (H) und je 3 gleichwerthige Seitenkanten (M, N); durch die Mittelpunkte je zweier der letzteren, welche gegenüberliegen und daher auch ungleichwerthig sind, geht eine Seitenaxe. Die krystallographischen Axenrichtungen gehen

durch unsymmetrisch gelegene Punkte der Flächen. Wird für vier durch die obigen Symbole gegebenen Trapezoeder die morphologische Axe unendlich, so fallen die inversen Formen mit den direkten zusammen und geben zwei korrelate Varietäten der folgenden Form.

9. Das rhomboedrische Prisma $\varkappa\pi\{pqr\}$ oder $\varkappa\pi\{prq\}$, wenn $p + q + r = 0$. Die in Fig. 153 dargestellte, dem ersteren Symbole entsprechende Form besteht aus den Flächen

$$\begin{matrix} pqr & rpq & qrp \\ \bar{r}\bar{q}\bar{p} & \bar{p}\bar{r}\bar{q} & \bar{q}\bar{p}\bar{r} \end{matrix} \quad p + q + r = 0$$

und stimmt daher in ihren geometrischen Eigenschaften mit dem deuterosphenoidischen Prisma überein; der Charakter der 6 Flächen ist aber hier triklinisch. Die der morphologischen Axe parallelen 6 Kanten liegen in den sekundären Hauptschnitten und sind zu je 3 abwechselnd gleichwerthig (M, N). Durch Paare ungleichwerthiger Kanten gehen die Axenrichtungen und die sekundären Seitenaxen, während die primären durch unsymmetrisch gelegene Punkte der Flächen gehen.

Der Querschnitt ist ein symmetrisches Sechseck und unterscheidet sich für je zwei korrelate Formen nur durch gerade entgegengesetzte Lage.

10. Die rhomboedrische Deuterohemipyramide $\varkappa\pi\{hil\}$ oder $\varkappa\pi\{hli\}$, wenn $2i = h + l$, als Hemieder der rhomboedrischen Deuterohemipyramide. Das erstere dieser Symbole gibt eine Form, Fig. 154, mit den 6 Flächen

$$\begin{matrix} hil & lhi & ilh \\ h\bar{l}\bar{i} & \bar{i}h\bar{l} & \bar{l}\bar{i}h \end{matrix} \quad i = \frac{h + l}{2}$$

welche also in geometrischer Hinsicht mit dem entsprechenden holohexagonalen Hemieder übereinstimmt. Die Pole dieser Flächen liegen in den sekundären Zonenkreisen, und je eine obere und untere dieser Flächen schneiden sich in einer Linie des basischen Hauptschnittes. Die gegenwärtige Form ist daher eine dreiseitige Pyramide, deren Basis ein gleichseitiges Dreieck ist; die Seiten des letzteren sind parallel den primären Hauptschnitten, dasselbe hat aber für je zwei korrelate Formen gerade entgegengesetzte Lage. Von solchen zwei korrelaten Formen sind die Flächen der einen die inversen der Flächen der anderen Form. Die beiden Formen können daher auch durch Drehung der einen um die morphologische Axe um 180° in dieselbe Stellung gebracht werden und sind somit nicht enantiomorph.

Die 6 Flächen dieser Form sind triklinische, ihr Umriss ein gleichschenkliges Dreieck; dieselben bilden 5 Ecken, und zwar 2 trigonale

dreiflächige und 3 dreiflächige triklinische, welche letztere in die sekundären Hauptschnitte fallen. Von den 9 Kanten sind sowohl die 6 Polkanten (*H*), welche in den sekundären Hauptschnitten liegen, als auch die 3 Basiskanten (*N*) gleichwerthig. Durch die Mittelpunkte letzteren und durch die gegenüberliegenden Ecken gehen die Seitenaxen, die Axenrichtungen aber gehen durch unsymmetrisch gelegene Punkte der Flächen. Die verschiedenen Varietäten dieser Form zerfallen nach ihrer Stellung in zwei Gruppen, deren jede nur Pyramiden gleicher Basis enthält. Die zu diesen zwei Gruppen zugehörigen zwei Prismen erhält man dadurch, dass die morphologische Axe zweier korrelaten Formen unendlich wird; diess gibt uns die zwei Varietäten der folgenden Form.

11. Das rhomboedrische Deuterohemiprisma, von welchem es eben nur die erwähnten zwei Varietäten gibt, nämlich die Form $\varkappa\varkappa\{10\bar{1}\}$, Fig. 155, mit den 3 Flächen

$$10\bar{1} \quad \bar{1}10 \quad 0\bar{1}1$$

und die Form $\varkappa\varkappa\{1\bar{1}0\}$, gebildet von den parallelen Flächen

$$1\bar{1}0 \quad 01\bar{1} \quad \bar{1}01$$

In geometrischer Hinsicht stimmen diese zwei Formen mit den entsprechenden holohexagonalen Hemiedern überein. Die trigonalen Querschnitte dieser zwei Prismen sind also zwei gleichseitige Dreiecke in entgegengesetzter Lage: die Seiten dieser Dreiecke aber sind parallel den primären Hauptschnitten.

Die 3 Flächen jeder dieser zwei Formen sind hemirhombisch, da sie auf den Seitenaxen senkrecht stehen; ihre drei der morphologischen Axe parallelen Kanten (*H*) liegen in den sekundären Hauptschnitten. Jede der Nebenaxen geht durch eine Kante und die gegenüberliegende Fläche, jede der Axenrichtungen aber durch unsymmetrisch gelegene Punkte zweier Flächen.

§. 47. Deuterohemihexagonale oder gyroidale Formen. A. Holoeder.

Die gleichwerthigen Ebenen der hieher gehörigen Krystalle sind durch das Schema (XIV) gegeben. Aus demselben ersehen wir, dass in diesem Falle nur der basische Hauptschnitt eine Ebene der Symmetrie ist; die morphologische Axe ist eine hemihexagonale, die Linien aber, welche den primären und sekundären Seitenaxen im holohexagonalen Systeme entsprechen, werden zu monoklinischen Axen und sind somit keine Hauptaxen mehr. Nichtsdestoweniger sind die einen wie die anderen dieser Linien noch immer gleichwerthige Richtungen, wie

man sich denn auch mit Hilfe des Schema (XIV) leicht überzeugt, dass wirklich diese Art der Hemisymmetrie sowohl die primären als die sekundären Hauptschnitte unter sich gleichwerthig bleiben. Die Flächen des Schema (XIV) geben uns nun in Verbindung mit ihren parallelen Flächen und durch die nachherige Spezialisirung der Indices für diese Art der Hemisymmetrie die folgende Reihe holoedrischer Formen:

1. Die **Tritopyramide** $\varphi\{hkl\}$ oder $\varphi\{hlk\}$. Dem ersteren Symbole entspricht eine Form, Fig. 156 mit den 12 Flächen

$$\left.\begin{matrix} hkl & lhk & klh \\ efg & gef & fge \\ \overline{hkl} & \overline{lhk} & \overline{klh} \\ \overline{efg} & \overline{gef} & \overline{feg} \end{matrix}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (XXI)$$

welche die eine Hälfte der Flächen der Dipyramide sind. Die andere Hälfte entspricht der korrelaten Form $\varphi(hlk)$, deren Flächen sich aus dem letzten Schema durch Vertauschung der Indices k mit l und f mit g ergeben. Man überzeugt sich leicht, dass je zwei solche korrelate Formen sich durch Drehung um die morphologische Axe in parallele Stellung bringen lassen. Zum Unterschiede kann man ersichtlich von zwei solchen Formen die eine als linke, die andere als rechte bezeichnen, je nachdem die Pole der oberen Flächen links oder rechts von dem nächsten primären Hauptzonenkreise liegen.

Da die Pole der oberen und der unteren Flächen (XXI) alle gleich weit von einander abstehen, und sich je zwei Flächen wie (hkl) und $(\overline{efg})$ in einer Linie des basischen Hauptschnittes schneiden, so ist diese Form eine sechsseitige Pyramide, die als Basis ein reguläres Sechseck hat, die Seiten dieses Sechseckes sind aber nicht parallel zu irgend welchem der Hauptschnitte, sondern haben eine intermediäre Lage, die für je zwei korrelate Formen um gleich viel nach entgegengesetzten Seiten von der Richtung der Hauptschnitte abweicht. Da die Basis senkrecht zur morphologischen Axe, so ist sie natürlich eine hemihexagonale Ebene, und ihr Umriss daher ein krystallographisches reguläres Sechseck.

Die 12 Flächen dieser Form sind triklinische und haben die Gestalt gleichschenkliger Dreiecke. Von den 8 Ecken sind 2 sechsflächig und hemihexagonal, 6 aber vierflächig und monoklinisch; die 18 Kanten zerfallen in 12 gleichwerthige Polkanten (L) und in 6 eben solche Basiskanten (D). Die Axenrichtungen gehen durch unsymmetrisch gelegene Punkte der direkten Flächen. Zur Bestimmung der Tritopyramiden von gleicher Basis haben wir dieselbe Bedingung wie bei der

Dipyramide; ebenso auch für die Bestimmung der zugehörigen Varietät der folgenden Form.

2. Das Tritoprisma $\varphi\{pqr\}$ oder $\varphi\{prq\}$, wenn $p + q + r = 0$. Dem ersteren Symbole entspricht die Fig. 157. Diese Form stimmt in geometrischer Hinsicht mit dem rhomboedrischen Tritoprisma überein, unterscheidet sich aber vom letzteren durch den monoklinischen Charakter seiner 6 Flächen, deren Pole ja in den basischen Hauptschnitt fallen.

Der Querschnitt ist ein regelmässiges Sechseck, für dessen Lage dasselbe wie für die Basis der Tritopyramide gilt. Die der morphologischen Axe parallelen 6 Kanten (L) sind sämmtlich gleichwerthig.

3. Die gyroïdale Protopyramide $\varphi\{hkk\}$, Fig. 158; die Flächen (XXI) werden für die Substitution $k = l$ identisch mit den Flächen einer holosymmetrischen Protopyramide, mit der also die gegenwärtige Form in geometrischer Hinsicht übereinstimmt. Die Flächen der letzteren sind aber monoklinisch und die Ecken theils hemihexagonal, theils monoklinisch.

4. Das gyroidale Protoprisma $\varphi\{2\bar{1}\bar{1}\}$, Fig. 159, bestehend aus denselben Flächen, wie die entsprechende holohexagonale Form; die Flächen sind aber in diesem Falle monoklinische.

5. Die gyroidale Deuteropyramide $\varphi\{hil\}$, Fig. 160, wenn $2i = h + l$, gebildet von 12 triklinischen Flächen, welche dieselbe Lage wie bei der entsprechenden holohexagonalen Form haben. Indem für die Ecken dieser Form dasselbe wie bei der Protopyramide gilt, sieht man, dass sich diese Formen sowie die vorhergehende Tritopyramide nur durch ihre Stellung, nicht aber durch ihre allgemeinen Symmetrieverhältnisse unterscheiden.

6. Das gyroidale Deuteroprisma $\varphi\{10\bar{1}\}$, Fig. 161, welches ebenfalls in geometrischer Hinsicht mit der entsprechenden holohexagonalen Form übereinstimmt, aber von monoklinischen Flächen gebildet wird. Auch diese Form und das vorhergehende Proto- und Titoprisma unterscheiden sich nicht durch die Art ihrer Symmetrieverhältnisse, sondern nur durch ihre Stellung zu den Hauptschnitten.

Die bisher abgehandelten 6 Formen können somit eigentlich als Varietäten zweier derselben, der Tritopyramide und des Tritoprisma, betrachtet werden.

7. Das gyroidale Pinakoid $\varphi\{111\}$, welches nur zwei zur morphologischen Axe senkrechte Flächen mit hemisymmetrischem Charakter sind. Durch letzteren Umstand unterscheidet sich dasselbe von der entsprechenden holohexagonalen und rhomboedrischen Form.

§. 48. Deuterohemihexagonale oder gyroidale Formen. B. Hemieder.

Wenn wir die durch das Schema (XXI) gegebenen Flächen der Tritopyramide in zwei korrelate Hemieder zu zerlegen suchen, so finden wir, dass diess nur auf eine Art ausgeführt werden kann, welche mit Hilfe der Spezialisirung der Indices die folgende Reihe hemiedrischer Formen gibt.

8. Die Tritohemipyramide $\varkappa\varphi\{hkl\}$, $\varkappa\varphi\{efg\}$, $\varkappa\varphi\{hlk\}$, $\varkappa\varphi\{hkl\}$. Nehmen wir von der Tritopyramide $\varphi\{hkl\}$ die folgenden 6 Flächen:

$$\left.\begin{matrix} hkl & lhk & klh \\ \bar{e}\bar{f}\bar{g} & \bar{g}\bar{e}\bar{f} & \bar{f}\bar{g}\bar{e} \end{matrix}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(XXII)}$$

so erhalten wir die dem Symbole $\varkappa\varphi\{hkl\}$, Fig. 162, entsprechende Form. Die verschiedenen Arten dieser Form unterscheiden sich den angegebenen Symbolen zufolge als rechte und linke, direkte und inverse; je zwei korrelate Formen können aber immer durch Drehung um die morphologische Axe in parallele Stellung gebracht werden.

Jede dieser Formen ist nämlich eine dreiseitige Pyramide mit einem krystallographischen gleichseitigen Dreiecke zur Basis, dessen Seiten aber weder den primären, noch den sekundären Hauptschnitten parallel sind, sondern eine intermediäre Lage haben. Je eine direkte und inverse Form, die korrelat sind, haben dieselbe Basis, aber in gerade entgegengesetzter Lage; für rechte und linke korrelate Formen ist jedoch die Basis um gleich viel nach rechts und links von den primären Hauptschnitten gedreht.

Die 6 Flächen dieser Form sind triklinische, die 5 Ecken alle dreiflächig, und zwar sind 2 der letzteren hemihexagonal, 3 aber monoklinisch. Die 9 Kanten zerfallen in 6 gleichwerthige Polkanten (H) und in 3 eben solche Basiskanten (D). Die Axenrichtungen gehen durch unsymmetrisch gelegene Punkte der Flächen. Varietäten dieser Form sind die nachfolgende Proto- und Deuterohemipyramide, die Hemieder der gyroidalen Proto- und Deuteropyramide. Wird die morphologische Axe der gegenwärtigen Form unendlich, so geht sie in die zugehörige Varietät der folgenden über.

9. Das Tritohemiprisma $\varkappa\varphi\{pqr\}$, Fig. 163, $\varkappa\varphi\{prq\}$, $\varkappa\varphi\{\bar{p}\bar{q}\bar{r}\}$, $\varkappa\varphi\{\bar{p}\bar{r}\bar{q}\}$, wenn $p + q + r = 0$, als Hemieder des Tritoprisma. Die 3 Flächen dieser Form sind also monoklinisch, die 3 Kanten (H) gleichwerthig und der Querschnitt ein krystallographisches gleichseitiges Dreieck, über dessen Lage für die verschiedenen Varietäten dieser Form dasselbe gilt, was wir über die Basis der vorhergehenden Form

gesagt haben. Die Axenrichtungen gehen auch hier durch unsymmetrisch gelegene Punkte der Flächen.

10. Die gyroidale Protohemipyramide $\varkappa\varphi\{hkk\}$, Fig. 164 oder $\varkappa\varphi\{eff\}$ unterscheidet sich von der entsprechenden holohexagonalen Form durch den triklinischen Charakter der 6 Flächen und durch die Ecken, die zu 2 hemihexagonal, zu 3 aber monoklinisch sind.

11. Das gyroidale Protohemiprisma $\varkappa\varphi\{2\bar{1}\bar{1}\}$, Fig. 165, und $\varkappa\varphi\{\bar{2}11\}$ stimmt bis auf den monoklinischen Charakter seiner 3 Flächen mit der entsprechenden holohexagonalen Form überein.

12. Die gyroidale Deuterohemipyramide $\varkappa\varphi\{hil\}$, Fig. 166 oder $\varkappa\varphi\{hli\}$, wenn $2i = h + l$ wird von denselben Flächen gebildet wie die gleichnamige holohexagonale Form; die 6 Flächen sind aber hier triklinische und die 5 dreiflächigen Ecken zu 2 hemihexagonal, zu 3 aber monoklinisch.

14. Das gyroidale Deuterohemiprisma $\varkappa\varphi\{10\bar{1}\}$, Fig. 167, und $\varkappa\varphi\{1\bar{1}0\}$, welches sich durch seine 3 monoklinischen Flächen von der entsprechenden holohexagonalen Gestalt unterscheidet.

§. 49. Hemimorphe hexagonale Formen.

Da im hexagonalen Systeme der zur morphologischen Axe senkrechte Hauptschnitt $T(111)$ mit keiner anderen Fläche gleichwerthig ist, so sind in diesem Systeme auch hemimorphe Formen möglich. Jeder im Vorhergehenden aufgezählten geschlossenen Formen dieses Systems gibt demzufolge zwei korrelate hemimorphe Formen, je nachdem man von ihren Flächen entweder bloss die oberhalb oder unterhalb des basischen Hauptschnittes liegenden als vorhanden betrachtet. So entsprechen der holomorphen Dipyramide $\{hkl\}$ zwei hemimorphe Dipyramiden, deren jede nur ein zwölfflächiges hexagonales Eck ist. Die Bezeichnung der zwei letzteren Formen ist $\varrho\{hkl\}$ und $\varrho\{\bar{h}\bar{k}\bar{l}\}$, indem wir jede untere hemimorphe Form durch diejenige ihrer Flächen bezeichnen, welche auch als obere Fläche zur Bezeichnung dienen würde, falls wir die positiven und negativen krystallographischen Axenrichtungen gegenseitig vertauschen.

Für jede geschlossene holomorphe Form, die eine Basis hat und also eine Pyramide ist, fallen die entsprechenden korrelaten, hemimorphen Formen offenbar in eins zusammen, falls die morphologische Axe der Pyramide unendlich wird; es geht nämlich die letztere, sowie ihre hemimorphen Formen in das zugehörige Prisma über. Hieraus geht hervor, dass von den offenen hexagonalen Formen denjenigen Prismen, welche zu Pyramiden gehören, keine hemimorphen Formen entsprechen.

Anders stellt sich jedoch die Sache für Prismen, welche zu geschlossenen Formen gehören, die keine Pyramiden sind; jedes solche Prisma, essen Flächen, wie diese Art der Betrachtung lehrt, theilweise als bere und untere aufzufassen sind, gibt zwei hemimorphe Prismen von leicher Flächenanzahl. Die bezüglichen Fälle sind:

1. Das Diprisma $\{pqr\}$, Fig. 132, insoferne es an hemiedrischen Krystallen das zu einem Ditrapezoeder $\varkappa\{hkl\}$, Fig. 137, gehörige Prisma vorstellt; die abwechselnden Flächen geben die korrelaten emimorphen Diprismen $\varrho\{pqr\}$ und $\varrho\{prq\}$, welche in geometrischer Hinsicht mit den Tritoprismen $\varphi\{pqr\}$, Fig. 157, und $\varphi\{prq$ bereinstimmen.

2. Das rhomboedrische Diprisma $\varkappa\{pqr\}$, Fig. 147, gibt durch wechselnde Flächenpaare die hemimorphen rhomboedrischen iprismen $\varrho\varkappa\{pqr\}$ und $\varrho\varkappa\{\bar p\bar q\bar r\}$, welche geometrisch mit den korlaten protosphenoidischen Prismen $\chi\{pqr\}$, Fig. 139, und $\chi\{\bar p\bar q\bar r\}$ bereinstimmen.

3. Dem rhomboedrischen Protoprisma $\varkappa\ \{2\bar1\bar1\}$, Fig. 149, entprechen die hemimorphen rhomboedrischen Protoprismen $\{2\bar1\bar1\}$ und $\varrho\varkappa\{\bar211\}$, welche in geometrischer Hinsicht wieder mit den ei Protohemiprismen $\chi\{2\bar1\bar1\}$, Fig. 141, und $\chi\{\bar211\}$ identisch sind.

4. Das rhomboedrische Prisma $\varkappa\varkappa\{pqr\}$, Fig. 153, gibt durch seine bwechselnden Flächen die hemimorphen rhomboedrischen rismen $\varrho\varkappa\varkappa\{pqr\}$ und $\varrho\varkappa\varkappa\{\bar p\bar r\bar q\}$, welche in ihren geometrischen Eigenschaften mit den korrelaten Tritohemiprismen $\varkappa\varphi\{pqr\}$, Fig. 163, d $\varkappa\varphi\{\bar p\bar r\bar q\}$ übereinstimmen.

Zum Schlusse bemerken wir noch, dass natürlich auch die verchiedenen Arten von Pinakoiden hemimorph auftreten können, wo sie nn entweder bloss die Fläche (111) oder die Fläche $(\bar1\bar1\bar1)$ vorstellen.

§. 50. Hexagonale Kombinationen.

Die Kombinationen, welche Krystalle des hexagonalen Systems zeigen können, zerfallen mit Bezug auf die Symmetrie ihrer krystallographischen und physikalischen Eigenschaften in holohexagonale, rhomboedrische und gyroidale, wie sich aus den Entwicklungen der vorhergehenden Paragraphe dieses Kapitels ergibt. Je nach dem Auftreten hemiedrischer und hemimorpher Formen kann man die angegebenen Arten von Kombinationen erstens in holoedrische und hemiedrische, zweitens in holo- und hemimorphe Kombinationen abtheilen. Bis jetzt sind jedoch nur in der rhomboedrischen Abtheilung hemiedrische und hemimorphe Kombinationen bekannt, und zwar von den letzteren nur

solche, die holoedrisch sind. Im Nachfolgenden sind einige Beispiele hexagonaler Kombinationen beschrieben.

Fig. 168 stellt eine am **Beryll** auftretende Kombination vor, welche holohexagonal und holoedrisch ist. Werden die 12 Flächen *x* als Protopyramide {100} gewählt, so entspricht dem Beryll ein Axenwinkel $\xi = 112^0\ 40'$ und die Symbole der übrigen Formen werden, wie sich zum Theile schon durch die Zonenregel ergibt.

$$\begin{matrix} \{111\}, & \{100\}, & \{5\bar{1}\bar{1}\}, & \{2\bar{1}\bar{1}\}, & \{41\bar{2}\}, & \{2\bar{1}0\} \\ t & x & r & p & s & u \end{matrix}$$

Fig. 169 ist eine hemiedrische, rhomboedrische Kombination, wie sie am **Quarze** beobachtet wird. Die zwölf Flächen *x* und *z* bilden scheinbar eine Proto- oder Deuteropyramide, da aber die physikalischen Eigenschaften dieser Flächen verschieden sind, so müssen sie, als zwei korrelaten Rhomboedern angehörig betrachtet werden; eine Ansicht, welche auch durch die übrigen krystallographischen Verhältnisse bestätigt wird. Bestimmt man die Axenebenen durch die Flächen *x* oder *z*, so gibt die Beobachtung für Quarz den Axenwinkel $\xi = 93^0\ 58'$ und für die betrachtete Kombination die Bezeichnung

$$\begin{matrix} \pi\{100\}, & \pi\{\bar{1}22\}, & \pi\{2\bar{1}\bar{1}\}, & \varkappa\pi\{41\bar{2}\}, & \varkappa\pi\{\bar{2}21\} \\ x & z & p & s & n \end{matrix}$$

Den Flächen *z'* und *n'* entsprechen daher die Symbole $(22\bar{1})$ und $(21\bar{2})$. An anderen Krystallen des Quarzes kommen statt der Formen *s* und *n* die korrelaten Formen $\varkappa\pi\{4\bar{2}1\}$ und $\varkappa\pi\{\bar{2}12\}$ vor, welche in Fig. 169 die anderen Kanten des Prisma *p* so abstumpfen würde, dass z. B. in die Zone [*x'p'*] je eine Fläche dieser zwei Formen entfällt. Es steht diess im Zusammenhange mit den optischen Eigenschaften der Quarzkrystalle; dieselben drehen nämlich längs ihrer morphologischen Axe die Polarisationsrichtung des Lichtes, und zwar entweder nach links oder rechts, je nachdem die parallelen Kanten von den Flächen wie *x*, *s*, *n'*, *p'* von links oben nach rechts unten, wie in Fig. 169, oder aber von rechts oben nach links unten verlaufen, wie in dem zweiten erwähnten Falle.

Fig. 170 gibt eine Kombination des **Apatites**. Dieselbe ist gyroidal und holoedrisch. Betrachtet man die Formen *x* und *r* als Protopyramiden, so ist *s* eine Deutero-, *u* aber eine Tritopyramide. Man hat für dieses Mineral einen Axenwinkel $\xi = 105^0\ 48'$ und die Symbole

$$\begin{matrix} \varphi\{111\}, & \varphi\{100\}, & \varphi\{5\bar{1}\bar{1}\}, & \varphi\{2\bar{1}\bar{1}\}, & \varphi\{4\bar{1}\bar{2}\}, & \varphi\{2\bar{1}0\} \\ t & x & r & p & s & u \end{matrix}$$

Fig. 171 stellt eine hemimorphe Kombination vor, wie sie am Turmalin beobachtet wird, der im übrigen rhomboedrisch, und zwar holoedrisch krystallisirt. Die hemimorphen Formen sind die mit t, g, e, p bezeichneten; wählt man die Flächen des Rhomboeders x zu Axenebenen, so hat man den Messungen zufolge für Turmalin den Axenwinkel $\xi = 100^0\ 34'$. Die Symbole der einzelnen Formen der betrachteten Kombination ergeben sich sämmtlich durch blosse Anwendung der Zonenregel, es ist

$$\begin{array}{cccccc} \varkappa\{100\}, & \varkappa\{10\bar{1}\}, & \varrho\varkappa\{2\bar{1}\bar{1}\}, & \varrho\varkappa\{011\}, & \varrho\varkappa\{111\}, & \varrho\varkappa\{\bar{1}11\} \\ x & q & p & g & t & e \end{array}$$

wobei der Fläche g' die Bezeichnung (110) entspricht. Turmalin zeigt im Einklange mit der Hemimorphie seiner Krystallgestalt die Erscheinungen der Pyroelektrizität.

Der in Fig. 172 dargestellte Penetrationszwilling des Kalkspathes ($\xi = 101^0\ 55'$) könnte als ein blosser Ergänzungszwilling der zwei korrelaten Rhomboeder $\varkappa\{100\}$ und $\varkappa\{\bar{1}22\}$ aufgefasst werden, in welchem Falle die Flächen der beiden Formen ungleichwerthig sein müssten. Allein in der Natur sind beiderlei Flächen Theilungsflächen, welche im Kalkspathe parallel den Flächen $\varkappa\{100\}$ sind. Wir haben es daher mit einem wirklichen Zwillinge zu thun, der nach dem Zwillingsgesetze $\varkappa\{111\}$ gebildet ist. An demselben Minerale werden auch die Zwillingsgesetze $\varkappa\{100\}$, $\varkappa\{\bar{1}11\}$, $\varkappa\{011\}$ beobachtet.

Anmerkung. Es ist hier noch zu bemerken, dass an einigen rhomboedrischen Mineralien, wie Dioptas, Phenakit, Titaneisenerz Rhomboeder angegeben werden, deren Flächenpole zwischen die Hauptschnitte fallen, und die daher gegen die eigentlichen Rhomboeder eine mehr oder weniger gedrehte Stellung haben. Solche Formen würden eigentlich ein System bedingen, in welchem der allgemeinste Fall gleichwerthiger Ebenen nur durch 3 unter einander und zur morphologischen Axe gleich geneigte Ebenen gegeben ist, also ein tetartohexagonales System. Obwohl freilich die physikalischen Eigenschaften der genannten Mineralien sehr unvollständig untersucht sind, so scheinen doch für dieselben die gewöhnlichen Symmetrieverhältnisse rhomboedrischer Krystalle zu gelten, so dass jene Rhomboeder, welche meist untergeordnet auftreten, wohl nur als eine Art Meroedrie (§. 29) des Skalenoeders aufzufassen sind. Die Flächen eines Skalenoeders, die sich in abwechselnden Seitenkanten schneiden, bilden natürlich für sich ein Rhomboeder von der angegebenen Stellung.

7. Kapitel.

Die Symmetrieverhältnisse des tetragonalen Systems.

§. 51. Die gleichwerthigen Ebenen des holo- und hemitetragonalen Systems.

Tetragonale Krystalle haben fünf Hauptschnitte, von denen vier (U, V, R, R') tautozonal sind und sich unter gleichen Winkeln schneiden, der fünfte (W) aber auf den anderen senkrecht steht. Den letzteren Hauptschnitt wählen wir immer zur Axenebene XY, als Axenebenen YZ und XZ aber nehmen wir zwei der vier tautozonalen Hauptschnitte, die auf einander senkrecht stehen; in letzterer Hinsicht haben wir also die Wahl zwischen zwei Paaren von Hauptschnitten. Sind die Hauptschnitte U, W die zu Axenebenen gewählten, so können wir durch einen der übrig bleibenden, R etwa das Verhältnis zweier der Axenlängen bestimmen. Da somit die Axenebenen auf einander senkrecht stehen und zwei Axenlängen gleich werden, so haben die Elemente tetragonaler Krystalle die Form

$$a : a : c$$
$$\xi = \eta = \zeta = 90^0$$

und können sich für verschiedene also krystallisirende Substanzen nur durch den Werth des Verhältnisses $a : c$ oder die Grösse c unterscheiden, da wir a immer gleich eins setzen. Die Hauptschnitte erhalten ersichtlich die Bezeichnung

$$U(100),\ V(010),\ W(001)$$
$$R(110),\ R'(1\bar{1}0);$$

ihre Pole und die ihnen entsprechenden Hauptzonenkreise werden aber auf der Sphäre der Projektion die in Fig. 173 gegebene Lage haben.

Es folgt diess auch schon aus dem im fünften Kapitel Gesagten, indem die Hauptschnitte des tesseralen Systems durch blosse Weglassung der Hauptschnitte P, P', Q, Q' in die des tetragonalen Systems übergehen. In Uebereinstimmung hiermit finden wir, dass auch für dieses System jeder Hauptzonenkreis dasselbe Symbol erhält, wie der Hauptschnitt, der auf dieser Zone senkrecht steht.

Den Hauptschnitt W, welcher senkrecht zur ZAxe ist, nennen wir den basischen Hauptschnitt, von den vier tautozonalen Hauptschnitten aber die zwei zu Axenebenen gewählten die primären, die anderen zwei die sekundären Hauptschnitte. Es ist klar, dass das eingeführte Axensystem mit Bezug auf den basischen und die primären Hauptschnitte ein isoschematisches Axensystem der ersten Art mit Bezug auf die sekundären aber eines der zweiten Art ist. Da unter den tautozonalen Hauptschnitten solche vorkommen, die nicht auf einander senkrecht stehen, so werden tetragonale Krystalle bei jeder Temperatur isoschematisch sein müssen mit Bezug auf jede ihrer Flächen, welche in der Zone der primären Hauptschnitte liegt, deren Pol also in den Hauptzonenkreis W entfällt.

Wie man nun für dieses System zur Kenntnis der Ebenen gelangt, die mit der Ebene (hkl) einen einfachen, nach allen Hauptschnitten isoschematischen Komplex bilden, ist nach dem, was wir über diese Aufgabe bei Gelegenheit des tesseralen Systems gesagt haben, unmittelbar klar, und man überzeugt sich leicht, dass das dort mit (II) bezeichnete Schema einen einfachen Komplex von Ebenen gibt, der nach einer Anzahl Flächen isoschematisch ist, welche den Hauptschnitten des gegenwärtigen Systems entsprechen.

Für das holotetragonale System, in welchem alle Hauptschnitte Ebenen der Symmetrie sind, ist also die Anordnung der gleichwerthigen Ebenen gegeben durch das Schema

$$\begin{matrix} hkl & \bar{h}kl & \bar{h}\bar{k}l & h\bar{k}l \\ khl & \bar{k}hl & \bar{k}\bar{h}l & k\bar{h}l \end{matrix} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(XXIII)}$$

die Anordnung gleichwerthiger Richtungen aber durch die Normalen der in diesem Schema enthaltenen Ebenen. Welches die Vertheilung der Pole dieser Ebenen auf der Sphäre der Projektion sein wird, geht auch unmittelbar aus dem für das tesserale System Gesagte hervor. Man überzeugt sich aber auch leicht direkt von der Richtigkeit der in Fig. 173 gegebenen Anordnung der Pole dieser Ebenen. Nachdem nämlich die Vorzeichen ihrer Indices so gewählt sind, dass sie lauter obere Ebenen sind, d. h. solche, deren Pole auf derselben Seite des Haupt-

zonenkreises W liegen wie der Pol (111), und ihre Anzahl 8 ist, so muss natürlich in jedes der 8 Dreiecke, in welche die obere Hälfte der Sphäre durch die Hauptschnitte getheilt wird, der Pol je einer dieser 8 Ebenen entfallen.

Der Pol einer oberen Ebene $E(i_1 i_2 i_3)$ wird aber in das Dreieck (100) (110) (001) fallen, je nachdem er

erstens auf derselben Seite des Hauptzonenkreises $V[010]$ liegt wie die Pole (110), (010)... und

zweitens auch auf derselben Seite des Hauptzonenkreises $R'[\bar{1}10]$ wie die Pole (100), $(1\bar{1}0)$....liegt. Diess gibt uns aber für die Indices der Ebene E die Bedingungen

$$i_2 \geqq 0$$
$$i_1 - i_2 \geqq 0$$

d. h. es muss

$$i_1 \geqq i_2 \geqq 0$$

sein. Natürlich muss auch i_3 positiv sein, indem sonst die Ebene E ja keine obere wäre; sonst kann aber i_3 beliebig gross sein.

Setzen wir nun voraus, dass h, k, l positive Grössen sind und

$$h > k$$

so wird in das Dreieck (100) (110) (001) der Pol der Ebene (hkl) entfallen müssen. Hieraus ergibt sich aber auch sogleich die Lage der Pole der übrigen Ebenen (XXIII). Je zwei benachbarte der 8 Dreiecke, die zu beiden Seiten eines primären Hauptschnittes liegen, unterscheiden sich nur durch die Richtung einer Axe, solche benachbarte Dreiecke jedoch, die zu beiden Seiten eines sekundären Hauptschnittes liegen, haben mit Bezug auf die ZAxe die gleiche mit Bezug auf die X– und YAxe aber entgegengesetzte Lage.

Die Pole der Ebenen (XXIII) werden alle gleich weit abstehen vom Pole (111) und die Winkel zwischen je zwei benachbarten Polen können nur zweierlei Werthe haben, je nachdem der betreffende Winkel durch einen primären oder sekundären Hauptschnitt halbirt wird.

Mit Hilfe des Schema (XXIII) überzeugt man sich leicht, dass die primären Hauptschnitte nur unter sich und mit keiner anderen Ebene gleichwerthig sind, was übrigens auch durch unmittelbare geometrische Anschauung sich ergibt. Dasselbe gilt aber auch für die sekundären Hauptschnitte und für den basischen Hauptschnitt, welcher letztere mit keiner anderen Ebene gleichwerthig ist. Demzufolge entsprechen von den 3 Axenrichtungen nur die X– und YAxe gleichwerthigen Richtungen. In dem Schema (XXIII) finden wir auch, dass der

Index l, welcher sich auf die ZAxe bezieht, immer seine dritte Stelle beibehält und nur die anderen zwei Indices ihren Platz vertauschen.

Gehen wir jetzt zur Betrachtung der Hemisymmetrie über, so finden wir, dass nur ein einziges hemitetragonales System möglich ist, dessen gleichwerthige Ebenen durch die folgenden vier der Ebenen (XXIII) repräsentirt werden

$$hkl \quad \bar{k}hl \quad \bar{h}\bar{k}l \quad k\bar{h}l \quad \ldots\ldots\ldots \text{(XXIV)}$$

Alsdann ist nur mehr der basische Hauptschnitt eine Ebene der Symmetrie, mit Bezug auf welche die Ebenen (XXIV) offenbar einen zweizähligen isoschematischen Komplex bilden. Es sind aber auch dann noch die primären Hauptschnitte, sowie die sekundären unter sich gleichwerthig.

Es hat freilich den Anschein, als ob noch eine zweite Art der Hemisymmetrie möglich wäre, repräsentirt durch die Ebenen

$$hkl \quad \bar{h}kl \quad \bar{h}\bar{k}l \quad h\bar{k}l$$

in welchem Falle nicht nur der basische, sondern auch die primären Hauptschnitte Ebenen der Symmetrie wären. Allein diese vier Ebenen bilden einen einfachen, nach den Hauptschnitten U, V, W isoschematischen Komplex, welches der Fall des folgenden rhombischen Systems ist, wesshalb also dem §. 26 zufolge eine solche Hemisymmetrie des tetragonalen Systems nicht möglich ist. Das Gleiche gilt von einer durch die Ebenen

$$hkl \quad hlk \quad \bar{h}\bar{k}l \quad \bar{k}\bar{h}l$$

gegebene Symmetrie, welche wieder einen einfachen Komplex vorstellen, der isoschematisch ist nach den drei zu einander senkrechten Hauptschnitten R, R', W.

Zur vollständigen Kenntnis der Symmetrieverhältnisse dieses Systems haben wir noch die speziellen Lagen der Ebene (hkl) zu betrachten, aus welcher wir die übrigen Ebenen der Schema (XXIII) und (XXIV) abgeleitet haben. Ohne die Allgemeinheit zu beschränken, können wir hiebei annehmen, dass der Pol (hkl) in dem Dreiecke (100) (110) (001) liegt, und erhalten so die folgenden sieben Fälle. Der Pol der Ebene (hkl) kann nämlich liegen:

1. in keinem der Hauptzonenkreise, was eben der schon betrachtete allgemeine Fall ist;

2. in dem basischen Hauptzonenkreise W[001], in Folge dessen

$$l = 0$$

wird und das Schema (XXIII) nur vier wesentlich verschiedene Ebenen vorstellt;

3. in den sekundären Hauptzonenkreis $R'[\bar{1}10]$, in welchem Falle

$$h = k$$

wird und das allgemeine Schema vier Ebenen gibt;

4. in den beiden Zonenkreisen $R'[\bar{1}10]$ und $W[001]$, demzufolge

$$h = k, \; l = 0$$

sein muss und das Schema (XXIII) uns die sekundären Hauptschnitte repräsentirt;

5. in dem primären Hauptzonenkreise $V[010]$, wodurch

$$k = 0$$

wird und die Ebenen (XXIII) sich auf vier reduziren;

6. in den beiden Zonenkreisen $V[010]$ und $W[001]$, wobei

$$k = l = 0$$

sein muss und die Ebenen (XXIII) in die zwei primären Hauptschnitte übergehen;

7. endlich in den beiden Zonenkreisen $V[010]$ und $R[\bar{1}10]$ wodurch

$$h = k = 0$$

wird und die Ebenen (XXIII) sich auf den basischen Hauptschnitt reduziren.

Eine weitere Einsicht in die Anordnung der gleichwerthigen Ebenen erhalten wir wieder durch die folgende Untersuchung über die holo- und hemisymmetrischen Formen dieses Systems; die Lage, welche für diese Formen die Pole ihrer Flächen haben, ergibt sich aus Fig. 173

§. 52. Holotetragonale Formen. A. Holoeder.

Untersuchen wir die Hauptaxen holotetragonaler Krystalle, so überzeugen wir uns mit Hilfe der Fig. 173 leicht, dass solcher Hauptaxen 5 sind. Wir haben nämlich eine tetragonale Axe, welche die Richtung der ZAxe ist, und die uns daher eine morphologische Axe gibt; senkrecht zu derselben haben wir aber vier rhombische Seitenaxen, die zwei gleichwerthigen Richtungen entsprechen, je nachdem sie die Durchschnitte des basischen Hauptschnittes mit den primären oder sekundären Hauptschnitten sind. Die ersteren zwei, welche offenbar die X- und YAxe sind, nennen wir die primären, die anderen zwei die sekundären Seitenaxen.

Indem wir nun h, k, l als rational voraussetzen, erhalten wir aus Schema (XXIII) als allgemeinsten Fall eines holotetragonalen Holoeders die folgende Form:

1. Die Dipyramide $\{hkl\}$, Fig. 174, mit den 16 Flächen

$$\left.\begin{array}{llll} hkl & \bar{h}kl & \bar{h}\bar{k}l & h\bar{k}l \\ khl & \bar{k}hl & \bar{k}\bar{h}l & k\bar{h}l \\ \bar{h}\bar{k}\bar{l} & h\bar{k}\bar{l} & hk\bar{l} & \bar{h}k\bar{l} \\ \bar{k}\bar{h}\bar{l} & k\bar{h}\bar{l} & kh\bar{l} & \bar{k}h\bar{l} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (XXV)$$

deren Symbole sich aus dem einer derselben dadurch ableiten, dass man in dem Symbole dieser Fläche bloss die Zahlenwerthe der zwei ersten Indices vertauscht, und in den so erhaltenen zwei Symbolen die Zeichen entsprechender Indices auf alle möglichen Weisen ändert. Die Lage der Pole der oberen Flächen auf der Sphäre der Projektion ist unter der Voraussetzung $h > k$ die in Fig. 173 gegebene, wie wir ja schon gesehen haben.

Die 16 Flächen dieser Form sind triklinische und haben die Gestalt von ungleichseitigen Dreiecken; diese Form ist nämlich eine Pyramide, deren Basis in den Hauptschnitt W fällt, da ja je zwei Flächen wie (hkl) und $(hk\bar{l})$ sich in einer Linie des basischen Hauptschnittes schneiden. Der Umriss der zur morphologischen Axe senkrechten Basis ist aber ein krystallographisches symmetrisches Achteck. Von den 10 Ecken sind 2 achtflächig und tetragonal, 8 aber vierflächig und rhombisch. Letztere sind zweierlei Art, je nachdem sie die Endpunkte der primären oder der sekundären Seitenaxen sind; die morphologische Axe geht natürlich durch die beiden tetragonalen Ecken. Die 24 Kanten zerfallen in 8 gleichwerthige Basiskanten L und in zwei Gruppen von je 8 gleichwerthigen Polkanten K und F, von denen die ersteren in den primären, die letzteren in den sekundären Hauptschnitten liegen. Die Bedingung, dass zwei Dipyramiden, $\{hkl\}$ und $\{h'k'l'\}$ die gleiche Basis haben, ist offenbar die, dass ihre entsprechenden Flächen (hkl) und $(h'k'l')$ mit dem basischen Hauptschnitte (001) in einer Zone liegen; es muss also

$$\frac{h}{k} = \frac{h'}{k'}$$

sein. Da wir immer $h = h'$ machen können, so wird dann auch $k = k'$ und die Basis der zwei Dipyramiden wird nicht nur den gleichen Umriss, sondern auch dieselbe absolute Grösse haben. Wird die morphologische Axe der zweiten Dipyramide $\{hkl'\}$ unendlich, also $l' = 0$, so erhalten wir die nachfolgende Form $\{hk0\}$, welche der erste spezielle Fall der

Dipyramide $\{hkl\}$ ist, und dem Gesagten zufolge das zur letzteren Form gehörige Prisma vorstellt.

2. Das Diprisma $\{hk0\}$, Fig. 175, gebildet von den 8 triklinischen Flächen

$$\begin{matrix} hk0 & \bar{h}k0 & \bar{h}\bar{k}0 & h\bar{k}0 \\ kh0 & \bar{k}h0 & \bar{k}\bar{h}0 & k\bar{h}0 \end{matrix}$$

welche sämmtlich der morphologischen Axe parallel sind und somit nur eine offene Form geben. Die 8 Kanten zerfallen in zwei Gruppen von je 4 gleichwerthigen Kanten K, F, je nachdem dieselben in den primären oder sekundären Hauptschnitten liegen, oder was dasselbe ist, je nachdem dieselben senkrecht auf den primären oder sekundären Seitenaxen stehen. Der Querschnitt dieses Prisma ist ein symmetrisches Achteck.

3. Die Protopyramide $\{hhl\}$, Fig. 176, welche von den 8 Flächen

$$\begin{matrix} hhl & \bar{h}hl & \bar{h}\bar{h}l & h\bar{h}l \\ \bar{h}\bar{h}\bar{l} & h\bar{h}\bar{l} & hh\bar{l} & \bar{h}h\bar{l} \end{matrix}$$

gebildet wird, entsteht aus der Dipyramide durch Verschwinden der Kanten F, und ist also eine vierseitige Pyramide mit quadratischer Basis. Die Seiten dieses Quadrates sind parallel den sekundären Seitenaxen, daher die verschiedenen Varietäten dieser Form auch alle von gleicher Basis sind.

Die 8 Flächen sind monoklinische, da ihre Pole in die sekundären Hauptschnitte fallen; ihre Umrisse sind gleichschenklige Dreiecke. Von den 6 vierflächigen Ecken sind 2 tetragonal, 4 als Endpunkte der primären Seitenaxen rhombisch. Unter den 12 Kanten sind 8 gleichwerthige Polkanten K und 4 gleichwerthige Basiskanten L, durch deren Mittelpunkte die sekundären Seitenaxen gehen. Wird die morphologische Axe dieser Form unnedlich, so erhalten wir als zugehöriges Prisma die nachfolgende Form:

4. Das Protoprisma $\{110\}$, Fig. 177, begrenzt von den 4 vollkommen bestimmten Flächen

$$\begin{matrix} 110 & \bar{1}10 \\ \bar{1}\bar{1}0 & 1\bar{1}0 \end{matrix}$$

welche den sekundären Hauptschnitten parallel sind, daher es von dieser Form nur eine einzige Varietät gibt. Die 4 Flächen sind rhombische, indem sie auf den sekundären Seitenaxen senkrecht stehen. Die 4 der morphologischen Axe parallelen Kanten K liegen in den

primären Hauptschnitten und sind gleichwerthig; durch Punkte derselben gehen die zu ihnen senkrechten primären Seitenaxen. Der Querschnitt ist ein Quadrat, dessen Seiten parallel den sekundären Seitenaxen sind.

5. Die Deuteropyramide $\{h0l\}$, Fig. 178 mit den 8 Flächen

$$h0l \quad 0hl \quad \bar{h}0l \quad 0\bar{h}l$$
$$\bar{h}0\bar{l} \quad 0\bar{h}\bar{l} \quad h0\bar{l} \quad 0h\bar{l}$$

welche, da ihre Pole in die primären Hauptzonenkreise fallen, monoklinische Flächen sind. Die Umrisse der letzteren sind gleichschenklige Dreiecke, und die Pyramide wird stumpf oder spitz genannt, je nachdem der von den gleichen Seiten dieser Dreiecke eingeschlossene Winkel grösser oder kleiner als 60° ist. Die 6 Ecken sind alle vierflächig, zwei derselben sind tetragonal, die übrigen als Endpunkte der sekundären Seitenaxen rhombisch. Die 12 Kanten zerfallen in 8 gleichwerthige Polkanten F und in 4 solche Basiskanten L; die ersteren liegen in den sekundären Hauptschnitten, durch die Mittelpunkte der letzteren aber gehen die primären Seitenaxen.

Diese Form entsteht aus der Dipyramide durch Verschwinden der Kanten K, wodurch die Basis in ein krystallographisches Quadrat übergeht, dessen Seiten parallel den primären Seitenaxen sind. Die verschiedenen Varietäten dieser Form sind daher alle von gleicher Basis und unterscheiden sich von den Protopyramiden nicht durch die Art ihrer Symmetrieverhältnisse, sondern abgesehen von den Winkelwerthen, nur durch ihre um 45° gedrehte Stellung.

6. Das Deuteroprisma $\{100\}$, Fig. 179, als das zur vorhergehenden Form gehörige Prisma, bestehend aus den 4 Flächen

$$100 \quad 010$$
$$\bar{1}00 \quad 0\bar{1}0$$

welche parallel den primären Hauptschnitten und daher rhombische Flächen sind. Die 4 der morphologischen Axe parallelen Kanten F sind gleichwerthig und liegen in den sekundären Hauptschnitten. Die primären Seitenaxen sind senkrecht zu den Flächen, die sekundären aber gehen durch Punkte der Kanten. Der Querschnitt ist ein Quadrat, dessen Seiten parallel den primären Seitenaxen sind, daher sich also diese Form von dem Protoprisma auch nicht durch die Symmetrieverhältnisse, sondern nur durch seine um 45° gedrehte Stellung unterscheidet.

7. Das Pinakoid $\{001\}$, welches nur aus den 2 Flächen

$$001 \quad 00\bar{1}$$

besteht und in den Fig. 175, 177, 179 benützt wurde, um die ebenfalls offenen Prismen damit zu schliessen. Letztere Figuren sind also eigentlich schon Kombinationen. Die Flächen des Pinakoids sind parallel dem basischen Hauptschnitte und senkrecht zu der morphologischen Axe, dieselben sind daher tetragonal.

§. 53. Holotetragonale Formen. B. Hemieder.

In diesem Systeme sind drei Arten von Hemiedrien möglich, welche genau denjenigen entsprechen, die wir für das holohexagonale System kennen gelernt haben. Wir erhalten daher noch die folgenden holotetragonalen Formen:

Erste Art der Hemiedrie.

8. Das Trapezoeder $\varkappa\{hkl\}$ oder $\varkappa\{khl\}$. Die dem ersten Symbole entsprechende Form, Fig. 180, ist gebildet durch die folgenden 8 abwechselnden Flächen der Dipyramide:

$$(\text{XXVI}) \ldots\ldots \left\{ \begin{matrix} hkl & \bar{k}hl & \bar{h}\bar{k}l & k\bar{h}l \\ k\bar{h}\bar{l} & h\bar{k}\bar{l} & kh\bar{l} & \bar{h}k\bar{l} \end{matrix} \right.$$

Vertauscht man in diesem Schema h und k, so erhält man die übrigen 8 Flächen der Dipyramide, da aber dieselben die Form $\varkappa\{khl$ geben, so folgt, dass je zwei Trapezoeder $\varkappa\{hkl\}$ und $\varkappa\{khl\}$ korrelat sind. Dieselben sind aber auch enantiomorph, indem sie durch keine Drehung in parallele Stellung gebracht werden können.

Die 8 Flächen dieser Form sind triklinische, ihre Umrisse aber Trapezoide mit zwei gleichen-anliegenden Seiten. Von den 10 Ecken sind 2 vierflächig und tetragonal, 8 aber dreiflächig und triklinisch. Die 16 Kanten zerfallen in 8 gleichwerthige Polkanten M und in zwei Gruppen von je 4 gleichwerthigen Seitenkanten T und S; durch die Mittelpunkte der ersteren Seitenkanten gehen die primären, durch die der letzteren aber die sekundären Seitenaxen. Diese Form wurde übrigens noch nicht in der Natur beobachtet.

Auf die übrigen Holoeder angewendet, bringt diese Art der Hemiedrie keine neuen Formen zum Vorschein, wie man sich mit Hilfe des Schema (XXVI) überzeugt, welches für alle speziellen Fälle dieselben Flächen wie das Schema (XXV) gibt.

Zweite Art der Hemiedrie.

9. Das Protodisphenoid $\chi\{hkl\}$ oder $\chi\{\bar{h}kl\}$. Die 8 Flächen

$$(\text{XXVII}) \ldots\ldots \left\{ \begin{matrix} hkl & khl & \bar{h}\bar{k}l & \bar{k}\bar{h}l \\ \bar{h}k\bar{l} & \bar{k}h\bar{l} & h\bar{k}\bar{l} & k\bar{h}\bar{l} \end{matrix} \right.$$

der Dipyramide geben die dem Symbole $\chi\{hkl\}$ entsprechende Form, Fig. 181, welche offenbar mit der Form $\chi\{\bar{h}kl\}$ korrelat ist. Je zwei solche korrelate Formen können aber durch Drehung um die morphologische Axe um 90⁰ in parallele Stellung gebracht werden, ebenso aber auch durch Drehung um eine sekundäre Seitenaxe um 180⁰.

Die 8 Flächen jeder hieher gehörigen Form sind triklinische und die Umrisse dieser Flächen im allgemeinen ungleichseitige Dreiecke. Die 6 Ecken sind alle vierflächig, und zwar sind 2 tetragonal, die übrigen 4 aber, welche in den sekundären Hauptschnitten liegen, monoklinisch. Von den 12 Kanten sind die 4 Seitenkanten *T*, durch deren Mittelpunkte die primären Seitenaxen gehen, gleichwerthig; die übrigen 8 Polkanten, welche in den sekundären Hauptschnitten liegen, zerfallen in zwei Gruppen von je vier gleichwerthigen Kanten *F*, *G*, wobei die sekundären Seitenaxen durch Punkte der ersteren Kanten gehen.

Indem wir auch die übrigen Holoeder dieser zweiten Art der Hemiedrie unterziehen, finden wir, dass nur die Protopyramide uns eine neue Form liefert.

10. Das P r o t o s p h e n o i d $\chi\{hhl\}$ oder $\chi\{\bar{h}hl\}$, welches aus der vorhergehenden Form durch das Verschwinden der Kanten *F* entsteht. Die 4 Flächen der dem ersteren Symbole entsprechenden Form, Fig. 182, sind zufolge Schema (XXVII)

$$\begin{matrix} hhl & \bar{h}\bar{h}l \\ \bar{h}h\bar{l} & h\bar{h}\bar{l} \end{matrix}$$

deren Pole in die sekundären Hauptzonenkreise entfallen. Das Protosphenoid ist also eine von 4 monoklinischen Flächen begrenzte Form; die Umrisse der Flächen sind gleichschenklige Dreiecke. Die 4 Ecken, welche in den sekundären Hauptschnitten liegen, sind alle dreiflächig und monoklinisch. Unter den 6 Kanten sind die 4 Seitenkanten *T* gleichwerthig, durch deren Mittelpunkte die primären Seitenaxen gehen; die übrigen 2 ebenfalls gleichwerthigen Kanten *D* sind abwechselnd parallel den zwei sekundären Seitenaxen, durch die Mittelpunkte dieser zwei Kanten geht die zu ihnen senkrechte morphologische Axe.

Wie diess schon aus der vorhergehenden allgemeinen Form folgt, so können auch je zwei korrelate Protosphenoide sowohl durch Drehung um die *Z*Axe um 90⁰, als auch durch Drehung um eine sekundäre Seitenaxe um 180⁰ in parallele Stellung gebracht werden.

Dritte Art der Hemiedrie.

11. Das Deuterodisphenoid $\gamma\{hkl\}$ oder $\gamma\{khl\}$. Dem ersteren Symbole entspricht eine Form, Fig. 183, mit den folgenden 8 Flächen der Dipyramide

$$(\mathrm{XXVIII}) \; . \; . \; . \; . \; . \left\{ \begin{matrix} hkl & \bar{h}kl & \bar{h}\bar{k}l & h\bar{k}l \\ \bar{k}h\bar{l} & k\bar{h}\bar{l} & kh\bar{l} & \bar{k}h\bar{l} \end{matrix} \right.$$

Aus diesem Schema erhellt aber sofort, dass die Flächen des Deuterosphenoids sich gerade so zu den sekundären Hauptschnitten verhalten, wie die Flächen des Protodisphenoids sich zu den primären Hauptschnitten verhalten. Ein Unterschied zwischen den Formen dieser beiden Arten von Hemiëdrien wird daher nur dann zu machen sein, wenn wirklich beiderlei Formen an Krystallen einer und derselben Substanz, wenn auch nicht gleichzeitig, auftreten können. Das letztere ist nun allerdings noch fraglich, daher wir auch auf die Formen dieser Hemiedrie nicht näher eingehen, deren Symmetrieverhältnisse sich übrigens schon aus denen der vorhergehenden Formen ergeben, sobald man berücksichtigt, dass hier die primären mit den sekundären Hauptschnitten und umgekehrt vertauscht sind.

12. Das Deuterosphenoid $\gamma\{h0l\}$ oder $\gamma\{0hl\}$. Die Flächen der ersteren Form, Fig. 184, sind:

$$\begin{matrix} h0l & \bar{h}0l \\ 0h\bar{l} & 0\bar{h}\bar{l} \end{matrix}$$

§. 54. Hemitetragonale Formen. A. Holoeder.

Da im Falle der Hemisymmetrie des tetragonalen Systems die gleichwerthigen Ebenen durch das Schema (XXIV) repräsentirt sind, so sehen wir, dass alsdann nur der basische Hauptschnitt eine Ebene der Symmetrie ist und ausser der hemitetragonalen morphologischen Axe keine andere Hauptaxe vorhanden ist. Die Richtungen nämlich, welche im holotetragonalen Systeme den primären und sekundären Seitenaxen entsprechen, sind im hemitetragonalen Systeme nur monoklinische Axen, obwohl je zwei dieser Richtungen auch im letzteren Falle noch gleichwerthig sind. Das Schema (XXIV) gibt nun den allgemeinsten hemitetragonalen Holoeder, die Spezialisirung der Indices aber die speziellen Formen. Noch bemerken wir, dass ersichtlich das hemitetragonale System der gyroidalen Hemisymmetrie des hexagonalen Systems entspricht.

1. Die **Tritopyramide** $\pi\{hkl\}$ oder $\pi\{khl\}$; die erstere der diesen zwei Symbolen entsprechenden korrelaten Formen ist gebildet von den 8 Flächen, Fig. 185,

$$\left.\begin{matrix} hkl & \bar{k}hl & \bar{h}\bar{k}l & k\bar{h}l \\ \bar{h}\bar{k}\bar{l} & k\bar{h}\bar{l} & hk\bar{l} & \bar{k}h\bar{l} \end{matrix}\right\} \ldots\ldots \text{(XXIX)}$$

der Dipyramide. Da die Pole der vier oberen und vier unteren dieser Flächen gleich weit von einander abstehen, je zwei dieser Flächen aber tautozonal mit dem basischen Hauptschnitte sind, so ist diese Form eine vierseitige Pyramide mit quadratischer Basis. Die Seiten dieser Basis sind aber weder den primären, noch den sekundären Seitenaxen parallel, sondern haben eine intermediäre Lage. Je zwei korrelate Formen $\pi\{hkl\}$ und $\pi\{khl\}$ lassen sich offenbar durch Drehung um die morphologische Axe um einen von dem Verhältnisse $h : k$ abhängigen Winkel in parallele Stellung bringen; auch ist klar, dass mit Bezug auf jeden der Hauptschnitte die Basis solcher zwei Formen um gleichviel nach rechts und links gedreht sein wird. Ebenso können zwei solche korrelate Formen in parallele Stellung gebracht werden, wenn man eine derselben um irgend eine der Seitenaxen um 180° dreht.

Die Flächen der Tritopyramide sind triklinische, ihre Umrisse gleichschenklige Dreiecke. Von den 6 vierflächigen Ecken sind 2 hemitetragonal, 4 aber, welche in dem basischen Hauptschnitte liegen, monoklinisch. Unter den 12 Kanten sind 8 gleichwerthige Polkanten M und 4 eben solche Basiskanten L; durch unsymmetrisch gelegene Punkte der letzteren gehen die Axenrichtungen. Für die Symbole der Tritopyramiden mit gleicher Basis, d. i. solcher, deren quadratische Basen dieselbe Lage gegen die Hauptschnitte haben, hat man offenbar dieselbe Bedingung, wie bei der Dipyramide. Als blosse Vairetäten der gegenwärtigen Form können die nachfolgende Proto- und Deuteropyramyde betrachtet werden; als eine Tritopyramide mit unendlicher morphologischer Axe aber die nächste Form, welche das zugehörige Prisma vorstellt.

2. Das **Tritoprisma** $\pi\{hk0\}$ oder $\pi\{kh0\}$; die dem ersteren Symbole entsprechende Form, Fig. 186, ist gebildet von den 4 Flächen

$$\begin{matrix} hk0 & \bar{k}h0 \\ \bar{h}\bar{k}0 & k\bar{h}0 \end{matrix}$$

welche die eine Hälfte des Diprisma sind. Man sieht hieraus, dass die 4 Flächen jedes Tritoprisma monoklinischen Charakter haben, dass die 4 der morphologischen Axe parallelen Kanten M gleichwerthig sind, und dass der Querschnitt ein Quadrat ist von ähnlicher Lage wie

die Basis der Tritopyramide. Als Varietäten dieser Form sind wieder das nachfolgende Proto- und Deuteroprisma zu betrachten, welche sich von dem gegenwärtigen nicht durch die Art ihrer Symmetrieverhältnisse unterscheiden.

3. Die hemitetragonale Protopyramide $\pi\{hhl\}$, Fig. 187, stimmt in geometrischer Hinsicht mit der entsprechenden holotetragonalen Form überein, unterscheidet sich aber durch die triklinischen Flächen und durch die theils hemitetragonalen, theils monoklinischen Ecken.

4. Das hemitetragonale Protoprisma $\pi\{110\}$, Fig. 188, unterscheidet sich von der holotetragonalen Form durch seine monoklinischen Flächen.

5. Die hemitetragonale Deuteropyramide $\pi\{h0l\}$, Fig. 189, welche ebenfalls mit Ausnahme der triklinischen Flächen und der theils hemitetragonalen, theils monoklinischen Ecken mit der entsprechenden holotetragonalen Form übereinstimmt.

6. Das hemitetragonale Deuteroprisma $\pi\{100\}$, Fig. 190, durch seine monoklinischen Flächen von dem holotetragonalen unterschieden.

7. Das hemitetragonale Pinakoid $\pi\{001\}$, bestehend aus zwei zur morphologischen Axe senkrechten Flächen, welche in diesem Falle hemitetragonal sind.

§. 55. Hemitetragonale Formen. B. Hemieder.

Für die Tritopyramide ist eine einzige Art der Hemiedrie möglich, welche mit Berücksichtigung der speziellen Fälle uns folgende drei neue, hemitetragonale Formen gibt, von denen aber die zwei letzten als blosse Varietäten der ersten betrachtet werden können.

8. Das Tritosphenoid $\varkappa\pi\{hkl\}$, $\varkappa\pi\{\bar{k}hl\}$, $\varkappa\pi\{k\bar{h}l\}$, $\varkappa\pi\{\bar{h}\bar{k}l\}$. Die 4 Flächen

$$\text{(XXX)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \left\{ \begin{matrix} hkl & \bar{h}\bar{k}l \\ \bar{k}hl & k\bar{h}l \end{matrix} \right.$$

der Tritopyramide $\pi\{hkl\}$ geben uns die dem ersten Symbole $\varkappa\pi\{hkl\}$ entsprechende Form, Fig. 191, deren korrelate Form $\varkappa\pi\{\bar{k}hl\}$ von den anderen vier Flächen der Pyramide $\pi\{hkl\}$ gebildet wird; je zwei solcher Formen können aber durch Drehung um die morphologische Axe um 90^0 in parallele Stellung gebracht werden. Zerlegen wir ebenso die mit $\pi\{hkl\}$ korrelate Tritopyramide $\pi\{khl\}$, so erhalten wir wiederum zwei korrelate Formen, $\varkappa\pi\{khl\}$ und $\varkappa\pi\{\bar{h}kl\}$, die sich von den früheren

in geometrischer Hinsicht nur durch ihre Stellung unterscheiden, welche um die morphologische Axe um einen von dem Verhältnisse $h : k$ abhängigen Winkel gedreht ist.

Die 4 Flächen des Tritosphenoids sind triklinische, ihre Umrisse gleichschenklige Dreiecke; die 4 dreiflächigen Ecken sind triklinisch und die 6 Kanten zerfallen in 4 gleichwerthige Seitenkanten N und in 2 eben solche Kanten H, die dem basischen Hauptschnitte parallel sind und auf einander senkrecht stehen, indem sie abwechselnd den Basiskanten L der Tritopyramide parallel laufen. Durch die Mittelpunkte dieser zwei Kanten H geht die zu ihnen senkrechte morphologische Axe; die Axenrichtungen X und Y aber gehen durch unsymmetrisch gelegene Punkte der Flächen. Die Stellung des Tritosphenoids ist mit Bezug auf die morphologische Axe eine intermediäre zwischen den nachfolgenden zwei ähnlichen Formen.

9. Das hemitetragonale Protosphenoid $\varkappa\pi\{hhl\}$, Fig. 192, oder $\varkappa\varkappa\{\bar{h}hl\}$, welches sich von dem holotetragonalen durch seine triklinischen Flächen und Ecken unterscheidet. Für diese Form sind die zwei zur morphologischen Axe senkrechten Kanten H abwechselnd in den sekundären Hauptschnitten gelegen.

10. Das hemitetragonale Deuterosphenoid $\varkappa\pi\{h0l\}$, Fig. 193, oder $\varkappa\pi\{0hl\}$ unterscheidet sich nur durch den triklinischen Charakter seiner Flächen und Ecken von der entsprechenden holotetragonalen Form. Die 2 Kanten H, durch deren Mittelpunkte die morphologische Axe geht, liegen abwechselnd in den primären Hauptschnitten.

§. 56. Tetragonale hemimorphe Formen.

Was die Hemimorphie der tetragonalen Formen betrifft, so gelten ganz ähnliche Verhältnisse, wie wir sie bei dem hexagonalen Systeme kennen gelernt haben. Es ist nämlich auch in dem tetragonalen Systeme der zur morphologischen Axe senkrechte Hauptschnitt W mit keiner anderen Ebene gleichwerthig, und da diess der einzige solche Hauptschnitt ist, kann sich daher auch nur mit Bezug auf diesen eine Hemimorphie geltend machen. Das Resultat der letzteren ist offenbar, dass jeder geschlossenen holo- oder hemitetragonalen Form zwei korrelate hemimorphe Formen entsprechen, von denen die eine bloss von den oberen, die andere bloss von den unteren Flächen der holomorphen Form gebildet ist. Die Flächen der ersteren hemimorphen Form schneiden also die Z Axe auf der positiven, die Flächen der zweiten Form aber auf der negativen Seite. Beide Formen sind natürlich offene; die

obere derselben bezeichnen wir durch das um den Buchstaben ϱ vermehrte Symbol der entsprechenden holomorphen Form, und im Einklange hiermit die untere hemimorphe Form dadurch, dass wir den Buchstaben ϱ vor dasjenige Symbol setzen, welches der holomorphen Form entspricht, falls die drei positiven Axenrichtungen mit den negativen vertauscht werden. So gibt das Protosphenoid $\chi\{hkl\}$ die beiden hemimorphen Protosphenoide $\varrho\chi\{hkl\}$ und $\varrho\chi\{hk\bar{l}\}$.

Gehen wir von den geschlossenen Formen der vorhergehenden Paragraphe auf die Prismen über, so finden wir, dass den letzteren, insoferne sie die Grenzformen von Pyramiden sind, keine hemimorphen Formen entsprechen; für diesen Fall gehen nämlich, wie man sich leicht überzeugt, die korrelaten hemimorphen Hälften jeder Pyramide in eine einzige Form über, welche eben das zugehörige Prisma ist. Dagegen gibt uns jedes Prisma, insoferne es auch als Grenzform eines Sphenoids betrachtet werden kann, zwei hemimorphe Prismen, die freilich nur aus einem Flächenpaare bestehen. Das Diprisma gibt sogar dreierlei Arten hemimorpher Formen, insoferne dasselbe sowohl die Grenzform des Trapezoids, als auch die der beiden Disphenoide ist. Wir gehen auf diese hemimorphen Formen jedoch nicht näher ein, da sie erstens keine weiteren Schwierigkeiten darbieten und zweitens überhaupt an tetragonalen Krystallen noch kein ausgezeichneter Fall von Hemimorphie in der Natur beobachtet wurde.

§. 57. Tetragonale Kombinationen.

Wir wollen in diesem Paragraphe beispielshalber einige Kombinationen und Zwillinge des tetragonalen Systems betrachten. Dieselben zerfallen natürlich nach ihren Symmetrieverhältnissen in zwei wesentlich verschiedene Klassen, von denen die einen bloss von holotetragonalen, die anderen bloss von hemitetragonalen Formen gebildet werden.

Fig. 194 ist eine holoedrische, holotetragonale Kombination des Zinnsteins, für welchen, wenn man die 8 Flächen q als Deuteropyramide $\{101\}$ wählt, die Messung das Axenverhältnis $a : c = 1 : 0{\cdot}6724$ ergibt. Für diese Axenrichtungen geben die 8 Flächen s das Diprisma $\{320\}$; hieraus findet man aber die Symbole der übrigen Formen aus den Zonen $[rsr']$, $[qrm]$, $[o\,'q\,'o]$..., so dass die Bezeichnung dieser fünfzähligen Kombinationen wird:

$$\begin{matrix} \{110\}, & \{320\}, & \{101\}, & \{111\}, & \{321\} \\ m & s & q & o & r \end{matrix}$$

Fig. 195 gibt eine vierzählige hemiedrische Kombination, welche am Kupferkiese beobachtet wird. Betrachten wir die zwei korrelaten Sphenoide w und o als die Hemieder der Protopyramide {111}, so hat man für dieses Mineral $a : c = 1 : 0{\cdot}9856$ und findet die Symbole der übrigen Flächen bloss mit Hilfe der Zonenregel, zumal die Flächen m parallel der morphologischen Axe sind. Die an dieser Kombination auftretenden Formen geben jedoch keinen Aufschluss, ob dieselbe holo- oder hemitetragonal ist; da aber an anderen Krystallen dieses Minerals auch Disphenoide auftreten, so ist auch diese Kombination holotetragonal und ihr Zeichen:

$$\underset{w}{\varkappa\{111\}},\quad \underset{o}{\varkappa\{\bar{1}11\}},\quad \underset{m}{\{110\}},\quad \underset{p}{\{201\}}$$

Fig. 196 ist eine holoedrische hemitetragonale Kombination des Schwersteins. Wählt man die 8 Flächen o als Protopyramide {111}, so hat man den Messungen zufolge das Axenverhältnis $a : c = 1 : 1{\cdot}4835$ und die Bezeichuug

$$\underset{q}{\pi\{101\}},\quad \underset{g}{\pi\{122\}},\quad \underset{o}{\pi\{111\}},\quad \underset{n}{\pi\{311\}}$$

macht man dagegen die Form q zur Protopyramide, so ist $a : c = 1 : 1{\cdot}0495$ und

$$\underset{'q}{\pi\{111\}},\quad \underset{g}{\pi\{312\}},\quad \underset{o}{\pi\{201\}},\quad \underset{'n}{\pi\{241\}}$$

Diese Symbole könnten auch aus den früheren mit Hilfe der Formeln für die Transformation der Axen abgeleitet werden. Die Flächen der Form q sind in der Natur parallel den Kanten gestreift, die sie mit den Flächen n bilden. Aus dieser unsymmetrischen Streifung ergibt sich schon, dass die Flächen q triklinisch und die ganze Kombination daher hemitetragonal ist.

In Fig. 197 ist ein Juxtapositionszwilling des Zinnsteins abgebildet. Die Zwillingsaxe ist senkrecht zur Fläche (101) und jedes der beiden Individuen gebildet von Flächen der Formen {111}, {110}, {100}.

Der in Fig. 198 dargestellte Krystall des Kupferkieses kann auf zweierlei Art gedeutet werden: erstens bloss als Ergänzungszwilling d. h. als eine Durchdringung zweier Kombinationen in paralleler Axenstellung, wovon die Formen [w, $\varkappa$ {111} — o, $\varkappa$ {$\bar{1}$11}] der einen mit den Formen [o', $\varkappa$ {$\bar{1}$11} — w', $\varkappa$ {111}] der anderen korrelat sind; zweitens kann dieser Krystall aber auch als wirklicher Zwilling betrachtet werden, dessen Zwillingsfläche parallel einer der Flächen {110} ist. Ein

Unterschied zwischen diesen beiden Fällen würde nur dann stattfinden, wenn die Fig. 198 einen hemitetragonalen Krystall darstellte, indem alsdann im ersten Falle Flächen, wie *w* und *w'*, im zweiten Falle aber Flächen wie *w* und *o'* gleichwerthig sein müssen.

Fig. 199 gibt einen Krystall des **Schwersteins**, welcher scheinbar einfach ist; allein die Flächen *n* und *q* würden, wenn wir diesen Krystall wirklich als einfach betrachten, Pyramiden bilden, welche nur im rhombischen Systeme möglich sind. Diess, sowie die Nähte, welche die Flächen der Deuteropyramide *q* der Länge nach halbiren, lehren, dass dieser Krystall in Wirklichkeit ein Zwilling ist. Man könnte ihn nun fürs Erste als Ergänzungszwilling auffassen, d. h. als parallele Durchdringung zweier Kombinationen, wovon die eine von Flächen der Formen $\pi\{101\}$, $\pi\{122\}$, $\pi\{111\}$, $\pi\{311\}$, die andere aber von Flächen der korrelaten Formen $\pi\{101\}$, $\pi\{212\}$, $\pi\{111\}$, $\pi\{131\}$ gebildet ist. Dann müssen aber zufolge der Symmetrieverhältnisse des hemitetragonalen Systems Flächen wie *'q, q'* oder *'o, o'* gleichwerthig, Flächen wie *'g, g'* oder *'n, n'* ungleichwerthig sein. Dem widerspricht aber schon die in der Natur zu beobachtende, entgegengesetzte Streifung der Flächen *'q, q'*, welche auch in Fig. 199 ersichtlich gemacht ist. Letztere stellt daher einen wahren Penetrationszwilling vor, als dessen Zwillingsfläche irgend eine Fläche der Form $\{100\}$ zu betrachten ist, und dessen einzelne Individuen von Flächen der Formen $\pi\{101\}$, $\pi\{122\}$, $\pi\{111\}$, $\pi\{311\}$ gebildet werden. Die Streifung lässt in Fig. 199 leicht erkennen, welche Theile derselben dem einen, und welche Theile dem anderen Individuum angehören.

8. Kapitel.

Die Symmetrieverhältnisse des rhombischen Systems.

§. 58. Die gleichwerthigen Ebenen des rhombischen Systems.

In dieses System gehören die Krystalle mit nur drei zu einander senkrechten Hauptschnitten (U, V, W). Wählen wir letztere zu Axenebenen, so erhalten wir drei zu einander senkrechte Axenrichtungen, deren Längen durch irgend eine weitere Fläche des betreffenden Krystalles bestimmt werden müssen. Die Elemente rhombischer Krystalle haben daher die Form

$$a : b : c$$
$$\xi = \eta = \zeta = 90^0$$

Indem wir im Allgemeinen immer diejenige Axenrichtung zur XAxe wählen, der die grösste Axenlänge entspricht, zur ZAxe aber diejenige, welcher die kleinste Axenlänge zukömmt, so haben wir $a > b > c$. Da wir alsdann ferner die grösste Axenlänge a gleich eins setzen, so werden sich die Elemente verschiedener, rhombisch krystallisirender Körper nur durch die Längen b und c unterscheiden können. Man erreicht durch diese Wahl der Axenlängen den Vortheil, dass die bei der gewöhnlichen Art der Krystallzeichnung am meisten verkürzte Axenlänge b auch in der Projektion immer kleiner bleibt als die Axenlänge a. Man weicht jedoch von dieser Wahl hauptsächlich dann ab, wenn der betrachtete rhombische Körper in seinen krystallographischen Verhältnissen Aehnlichkeit mit einem bekannten hexagonalen, tetragonalen oder monoklinischen Körper von analoger chemischer

Zusammensetzung zeigt, in welchem Falle man die Stellung der letzteren Körper auch auf die rhombischen Krystalle überträgt.

Die Hauptschnitte dieses Systems haben ersichtlich die Symbole

$$U(100),\ V(010),\ W(001)$$

und können in dieser Ordnung als primärer, sekundärer und basischer Hauptschnitt unterschieden werden. Die den Hauptschnitten auf der Sphäre der Projektion, Fig. 200, entsprechenden Hauptzonenkreise erhalten auch hier wieder dieselben Symbole wie sie selbst, indem die Durchschnittspunkte dieser Zonenkreise die Pole der Hauptschnitte sind. Das angegebene Axensystem ist offenbar mit Bezug auf alle drei Hauptschnitte ein isoschematisches der ersten Art.

In dem Falle, dass alle Hauptschnitte Ebenen der Symmetrie sind, muss die Anordnung der gleichwerthigen Ebenen die folgende sein

(XXXI) . . . . . . $hkl \quad \bar{h}kl \quad \bar{h}\bar{k}l \quad h\bar{k}l$

indem schon aus §. 36 hervorgeht, dass diese 4 Ebenen einen einfachen nach allen 3 Hauptschnitten isoschematischen Komplex bilden. Ersichtlich wird in jedes der vier Dreiecke, in welche die obere Hälfte der Sphäre durch die Hauptschnitte getheilt wird, den Pol je einer dieser 4 Flächen entfallen, da ja diese Dreiecke verschiedenen Oktanten entsprechen. In jedem dieser Dreiecke wird aber die zugehörige Ebene dieselbe relative Lage gegen die entsprechenden Halbaxen haben, und wir erhalten so die in Fig. 200 gegebene Anordnung der Pole der Ebenen (XXXI), vorausgesetzt, dass h, k, l wirklich positive Grössen sind. Mit Hilfe des vorhergehenden Schema überzeugt man sich, dass keiner der drei Hauptschnitte noch mit einer anderen Ebene gleichwerthig ist. Diess folgt auch schon aus der blossen geometrischen Anschauung. Es kann also auch von den Axenrichtungen keine mit einer andern gleichwerthig sein, womit im Einklange steht, dass in den Symbolen der Ebenen (XXXI) jeder Index immer dieselbe Stelle beibehält.

Auf den Fall der Hemiedrie übergehend, finden wir, dass ein hemirhombisches System nicht möglich ist. Denn wählt man irgend zwei der Ebenen (XXXI), so erfüllt man hiedurch zwar die Bedingung, dass die Symmetrie für gleichwerthige Hauptschnitte dieselbe ist, es gibt ja gar keine solche Hauptschnitte in diesem Falle: aber jene zwei Ebenen bilden immer einen einfachen Komplex, der mit Bezug auf einen der Hauptschnitte isoschematisch ist, welcher Fall uns die Symmetrieverhältnisse des nachfolgenden Systems repräsentirt und daher als Hemisymmetrie nicht möglich ist.

Es bleibt uns also nur noch übrig, die speziellen Fälle für die Anordnung der gleichwerthigen Ebenen zu untersuchen. Da finden wir nun, dass der dem Dreiecke (100) (010) (001) angehörige Pol der Ebene (*hkl*) liegen kann:

1. als allgemeinster Fall in keinem der Hauptzonenkreise;
2. in dem Hauptzonenkreise *W*[001], in welchem Falle

$$l = o$$

ist und die Ebenen (XXXI) nur zwei wesentlich verschiedene Ebenen vorstellen;

3. in dem Hauptzonenkreise *U*[100], wodurch

$$h = o$$

wird und die Ebenen des ersten Falles sich auf zwei reduziren;

4. in dem Hauptzonenkreise *V*[010], was

$$k = o$$

und wieder zwei gleichwerthige Ebenen bedingt;

5. in den beiden Zonenkreisen *U*[100] und *V*[010], in Folge dessen

$$k = l = o$$

sein muss und die gleichwerthigen Ebenen (XXXI) sich auf den basischen Hauptschnitt reduziren;

6. in den beiden Zonen *V*[010] und *W*[001], demzufolge

$$k = l = o$$

ist und die Ebenen (XXXI) in den primären Hauptschnitt übergehen;

7. endlich in den beiden Zonenkreisen *W*[001] und *U*[100], wodurch

$$h = l = o$$

wird und das allgemeine Schema den sekundären Hauptschnitt gibt.

§. 59. Rhombische Formen. A. Holoeder.

Wie aus dem Vorhergehenden hervorgeht, haben rhombische Krystalle nur drei, und zwar rhombische Hauptaxen; es sind diess die Axenrichtungen, von denen keine mit einer anderen Richtung gleichwerthig ist. Von den Hauptaxen kann man die als *Z*Axe gewählte die vertikale Axe nennen, von den übrigen zwei aber die *X*Axe als Protodiagonale, die andere als Deuterodiagonale bezeichnen.

Aus dem Schema (XXXI) erhalten wir nun die folgenden rhombischen Holoeder, für welche die Pole ihrer oberen Flächen in Fig. 200 angegeben sind.

1. Die Pyramide $\{hkl\}$, Fig. 201, mit den 8 Flächen

$$\text{(XXXII)} \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} hkl & \bar{h}kl & \bar{h}\bar{k}l & h\bar{k}l \\ \bar{h}k\bar{l} & h\bar{k}\bar{l} & hk\bar{l} & \bar{h}\bar{k}\bar{l} \end{cases}$$

deren Symbole sich aus dem einer Fläche ergeben, wenn man, ohne die Stellung der Indices zu vertauschen, die Vorzeichen derselben auf jede mögliche Weise ändert.

Die Flächen dieser Form sind triklinische, ihre Umrisse ungleichseitige Dreiecke; die 6 Ecken sind alle vierflächig und rhombisch, aber dreierlei Art, da durch je zwei gegenüberliegende eine der Axenrichtungen hindurchgeht. Die 12 Kanten sind zu vier gleichwerthig, je nachdem sie in einem der drei Hauptschnitte liegen. Der Schnitt dieser Form mit jedem der Hauptschnitte ist ein krystallographischer Rhombus; sollen aber zwei verschiedene Varietäten dieser Form denselben Rhombus bilden, so muss offenbar für beide das Verhältnis der zwei Indices, welche sich auf die in jenem Hauptschnitte liegenden Axen beziehen, das nämliche sein.

Die Varietät (111) ist offenbar diejenige Pyramide, deren Ecken beziehungsweise um a, b, c von dem Mittelpunkte abstehen. Wird in der allgemeinen Form abwechselnd eine der drei Hauptaxen unendlich, so erhält man die nächstfolgenden drei Formen, zwei Domen und ein Prisma, welche die zu der Form $\{hkl\}$ gehörigen sind.

2. Das Prisma $\{hk0\}$, Fig. 202, dessen 4 Flächen

$$hk0 \quad \bar{h}k0 \quad \bar{h}\bar{k}0 \quad h\bar{k}0$$

der vertikalen Axe parallel sind; die Pole dieser 4 monoklinischen Flächen fallen also in den basischen Hauptschnitt. Von den 4 Kanten liegen 2 gleichwerthige (K) in dem primären Hauptschnitte, ebensolche 2 aber (H) auch in dem sekundären; durch erstere geht die Protodiagonale, durch letztere die Deuterodiagonale. Der Querschnitt dieser Form ist ein Rhombus.

3. Das Protodoma $\{0kl\}$, Fig. 203, gebildet von den 4 der Protodiagonale parallelen Flächen

$$\begin{matrix} 0kl & 0\bar{k}l \\ 0\bar{k}\bar{l} & 0k\bar{l} \end{matrix}$$

welche monoklinischen Charakter besitzen, da ihre Pole in den primären Hauptschnitt fallen, Fig. 200. Die 4 der Protodiagonale parallelen

Kanten sind zu zweien gleichwerthig, je nachdem sie in dem basischen oder in dem primären Hauptschnitte liegen (L, K). Durch Punkte derselben gehen die vertikale Axe und die Deuterodiagonale, welche auf den betreffenden Kanten senkrecht stehen. Der Querschnitt ist ein Rhombus.

4. Das Deuterodoma $\{h0l\}$, Fig. 204, mit den 4 Flächen

$$\begin{matrix} h0l & \bar{h}0l \\ \bar{h}0\bar{l} & h0\bar{l} \end{matrix}$$

welche der Deuterodiagonale parallel und monoklinisch sind, da ihre Pole in den sekundären Hauptschnitt fallen. Von den 4 Kanten sind die 2, welche in dem basischen Hauptschnitte liegen, und durch welche die Protodiagonale geht, gleichwerthig (L), ebenso die 2 in dem sekundären Hauptschnitte liegenden Kanten H, durch Punkte welcher die vertikale Axe geht. Der Querschnitt ist auch hier ein Rhombus.

5. Das basische Pinakoid $\{001\}$, gebildet von den 2 Flächen

$$001 \quad 00\bar{1}$$

welche dem basischen Hauptschnitte parallel und daher rhombisch sind.

6. Das Protopinakoid $\{100\}$, bestehend aus den 2 dem primären Hauptschnitte parallelen und daher rhombischen Flächen

$$100 \quad \bar{1}00$$

7. Das Deuteropinakoid $\{010\}$, mit nur 2 zu dem sekundären Hauptschnitte parallelen rhombischen Flächen

$$010 \quad 0\bar{1}0$$

Jedes dieser Pinakoide steht senkrecht auf den Flächen eines Doma oder Prisma, welche offene Formen in den Figuren durch die zu ihnen senkrechten Pinakoide geschlossen sind.

§. 60. Rhombische Formen. B. Hemieder,

Indem bloss abwechselnde Flächen der Pyramide $\{hkl\}$ auftreten, erhält man zwei korrelate Varietäten des folgenden allgemeinsten Hemieders des rhombischen Systems.

8. Das Sphenoid $\varkappa\{hkl\}$, oder $\varkappa\{\bar{h}kl\}$; dem ersteren Symbole entspricht eine Form, Fig. 205, mit den 4 Flächen

$$\left.\begin{matrix} hkl & \bar{h}\bar{k}l \\ \bar{h}k\bar{l} & hk\bar{l} \end{matrix}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(XXXIII)}$$

Die 4 Flächen des Sphenoids, sowie die 4 dreiflächigen Ecken haben triklinischen Charakter; der Umriss der Flächen ist ein un-

gleichseitiges Dreieck. Von den 6 Kanten (E, F, G) sind jedem Hauptschnitte 2 parallel, welche nur unter sich gleichwerthig sind und durch welche eine der Axenlängen geht.

Die Spezialisirung der Indices bringt keine neue Formen zum Vorschein; das Sphenoid ist also das einzige rhombische Hemieder, da eine andere Art der Hemiedrie nicht möglich ist.

§. 61. Rhombische hemimorphe Formen.

Da wir im rhombischen Systeme drei Hauptschnitte haben, von denen keiner mit einer anderen Ebene gleichwertig ist, so sind in diesem Systeme dreierlei Arten hemimorpher Formen möglich, die wir nach der Ordnung (U, V, W) der Hauptschnitte durch Vorsetzung der Buchstaben ϱ, σ, τ bezeichnen. Freilich unterscheiden sich diese drei Arten hemimorpher Formen nicht durch ihre Symmetrieverhältnisse, und eine verschiedene Bezeichnung derselben wäre nur insoferne nöthig, als sie wirklich an Krystallen derselben Substanz beobachtet werden, was freilich bis jetzt nicht konstatirt ist.

Die Pyramide $\{hkl\}$ gibt also mit Bezug auf den Hauptschnitt $U(100)$ die hemimorphen Pyramiden

$$\varrho\{hkl\} \text{ und } \varrho\{\bar{h}\bar{k}\bar{l}\}$$

mit Bezug auf den Hauptschnitt $V(010)$ die Formen

$$\sigma\{hkl\} \text{ und } \sigma\{\bar{h}\bar{k}\bar{l}\}$$

mit Bezug auf den basischen Hauptschnitt $W(001)$ endlich die korrelaten Formen

$$\tau\{hkl\} \text{ und } \tau\{\bar{h}\bar{k}\bar{l}\}$$

welche Formen sämmtlich offen sind und nur aus einem vierflächigen, rhombischen Ecke bestehen. So werden die letzten zwei Formen die eine von den oberen, die andere nur von den unteren Flächen der Pyramide gebildet.

In Uebereinstimmung hiermit gibt auch das Sphenoid drei Arten hemimorpher Sphenoide, welche alle nur aus zwei zu einander geneigten Flächen bestehen.

Ebenso entsprechen dem Proto- und Deuterodoma und dem Prisma, insoferne dieselben auch als spezielle Fälle eines Sphenoids betrachtet werden können, gleichfalls jedem drei Arten hemimorpher Formen. Zwei Arten dieser Formen sind aus zwei zu einander geneigten, die dritte Art bloss aus zwei parallelen Flächen gebildet; Formen wie die

letzteren sind $\varrho\{0kl\}$, $\sigma\{h0l\}$, $\tau\{hk0\}$, welche mit Bezug auf denjenigen Hauptschnitt hemimorph sind, der auf ihren Flächen senkrecht steht.

Betrachten wir schliesslich die **Pinakoide**, so finden wir leicht, dass dieselben nur mit Bezug auf den Hauptschnitt hemimorph sein können, dem sie parallel sind. Wir erhalten so Formen wie $\varrho\{100\}$, $\sigma\{0\bar{1}0\}$... welche sämmtlich nur aus einer einzigen Fläche bestehen.

§. 62. Rhombische Kombinationen.

Dem Vorhergehenden gemäss können sich die Kombinationen rhombischer Krystalle nicht durch die Art ihrer Symmetrieverhältnisse, sondern nur durch das Auftreten hemiedrischer und hemimorpher Formen unterscheiden. Die Figuren 206—207 geben einige Beispiele rhombischer Kombinationen.

Fig. 206 ist eine holoedrische Kombination des Topas; wählt man die Flächen o als Pyramide $\{111\}$, so hat man der Beobachtung zufolge das Axenverhältnis

$$a : b : c = 1 : 0{\cdot}5285 : 0{\cdot}4770$$

und die Symbole

$$\underset{m}{\{110\}},\quad \underset{n}{\{210\}},\quad \underset{o}{\{111\}},\quad \underset{q}{\{201\}},\quad \underset{c}{\{001\}}$$

Fig. 207 stellt eine hemiedrische Kombination des **Bittersalzes** vor, für welches

$$a : b : c = 1 : 0{\cdot}9901 : 0{\cdot}5709$$

ist im Einklange mit der Bezeichnung

$$\underset{o}{\varkappa\{111\}},\quad \underset{m}{\{110\}},\quad \underset{a}{\{100\}}$$

Fig. 208 gibt ebenfalls eine hemiedrische Kombination, welche aber zugleich hemimorph ist. Für **Struvit**, an welchem diese Kombination beobachtet wurde, verhält sich

$$a : b : c = 1 : 0{\cdot}8878 : 0{\cdot}8102$$

wenn man der Fläche o' das Symbol $\{22\bar{1}\}$ ertheilt; die Bezeichnung der ganzen Kombination aber wird

$$\underset{m}{\{110\}},\quad \underset{q}{\tau\{201\}},\quad \underset{p}{\tau\{011\}},\quad \underset{r}{\tau\{021\}},\quad \underset{o}{\tau\varkappa\{\overline{22}\bar{1}\}},\quad \underset{b}{\{010\}},\quad \underset{c}{\{001\}}$$

Fig. 209 gibt schliesslich ein Beispiel eines rhombischen Penetrations-Zwillings, in welcher Gestalt die Krystalle des **Stauroliths**

($a : b : c = 1 : 0{\cdot}4734 : 0{\cdot}6850$) häufig in der Natur auftreten. Jedes der beiden Individuen ist gebildet von den Formen {110}, {100}, {001}, die Zwillingsfläche aber ist parallel der Fläche {322}. Die Fig. 208 ist für den Fall gezeichnet, dass die beiden Individuen für sich und der ganze Zwilling im Gleichgewichte, und dass die Flächen {100} gleich breit mit den Flächen {110} sind, so dass diese Flächen nur zwölf (einspringende) Kanten bilden, von denen je sechs in einer Ebene liegen. Die zwei Ebenen dieser zwölf Kanten stehen auf einander senkrecht und die vertikale derselben ist eben die Zwillingsfläche (322). Die Stellung des ganzen Zwillings ist in der Zeichnung so gewählt, dass die erwähnte Zwillingsfläche parallel der ZEbene, die ZAxen der beiden Individuen aber parallel der XZEbene der vorhergehenden Figuren sind.

9. Kapitel.

Die Symmetrieverhältnisse des monoklinischen Systems.

§. 63. Die gleichwerthigen Ebenen des monoklinischen Systems.

Monoklinische Krystalle haben einen einzigen Hauptschnitt V, welchen wir zur Axenebene XY wählen, so dass sein Symbol (010) wird. Dieser Hauptschnitt wird senkrecht sein zu einer möglichen Zone des betreffenden Krystalles, indem ja letzterer isoschematisch sein muss mit Bezug auf seinen Hauptschnitt. Irgend zwei Flächen U, W dieser Zone wählen wir aber zu den beiden anderen Axenebenen, und da diese zwei Flächen auf dem Hauptschnitte V senkrecht stehen, so wird auch von den so bestimmten Axenrichtungen die YAxe senkrecht sein müssen zur X- und ZAxe. Die letzteren zwei Axen bilden natürlich zwei Winkel, wovon der eine grösser, der andere aber kleiner als 90° ist; zu den positiven Richtungen dieser Axen wählen wir nun gewöhnlich diejenigen Hälften derselben, welche einen stumpfen Winkel einschliessen. Indem wir noch die Axenlängen durch eine beliebige weitere Fläche des Krystalls bestimmen, erhalten wir im monoklinischen Systeme für die Elemente die Form

$$a : b : c$$
$$\xi = \zeta = 90^0, \eta > 90^0$$

wobei wir immer die Axenlänge $b = 1$ setzen; die Elemente verschiedener in diesem Systeme krystallisirender Substanzen werden sich daher durch die Werthe der Längen a und c und die Grösse des Winkels η unterscheiden. Das angegebene Axensystem ist aber mit Bezug auf den Hauptschnitt offenbar ein isoschematisches der ersten Art.

Fig. 210 gibt uns die Kreise, in welchen die Sphäre der Projektion durch die Axenebenen geschnitten wird, und hiebei ist der Hauptschnitt V als Ebene der Zeichnung gewählt, das Auge des Zeichners aber in die YAxe versetzt gedacht; die Durchschnitte der Axenebenen U und W werden daher als gerade Linien erscheinen müssen. Von diesen drei Durchschnitten entspricht jedoch nur dem der Axenebene V ein möglicher Zonenkreis, indem ja die anderen beiden Axenebenen keine Hauptschnitte sind. Die letzteren zwei Durchschnitte sind daher in der Fig. 210 auch nur als gestrichelte Linien gezeichnet; die Kreuzungspunkte derselben mit dem Hauptzonenkreise V werden aber offenbar die Endpunkte der X- und ZAxe sein. Zwei Punkte, die von diesen Endpunkten in dem Zonenkreise V um 90° abstehen, sind ersichtlich die Pole der Axenebenen U und W, während der Pol des Hauptschnittes V mit dem Endpunkte der YAxe zusammenfällt und also der Kreuzungspunkt der Kreise U und V, Fig. 210, ist. Für das Symbol des Hauptzonenkreises V ergibt sich hieraus [010], also wieder dasselbe wie für den entsprechenden Hauptschnitt.

In diesem Systeme ist die Anordnung der gleichwerthigen Ebenen für den Fall der Holosymmetrie, in welchem der Hauptschnitt V eine Ebene der Symmetrie ist, offenbar durch folgende zwei Symbole

(XXXIV) . . . . $hkl \quad \bar{h}k\bar{l}$

repräsentirt. Die Pole dieser zwei Ebenen liegen mit dem Pole (010) in einem grössten Kreise und stehen von demselben gleichweit ab, Fig. 210.

Ein hemimonoklinisches System ist nicht möglich, denn betrachten wir die zwei Ebenen als ungleichwerthig, so erhalten wir dieselben Symmetrieverhältnisse wie für das nachfolgende System.

Was noch die verschiedenen Lagen der Ebene (hkl) mit Bezug auf den Hauptschnitt V betrifft, so haben wir für den Pol derselben die folgenden Fälle:

1. den allgemeinen Fall, in welchem der Pol (hkl) ein beliebiger Punkt der Sphäre ist;

2. den Fall, wo dieser Pol ein Punkt des Hauptzonenkreises V ist, demzufolge

$$k = o$$

wird und die Ebenen (XXXIV) nur in eine einzige übergehen;

3. endlich den Fall, in welchem der Pol (hkl) mit dem Pole des Hauptschnittes V koindizirt, also

$$h = l = o$$

ist und das allgemeine Schema wieder nur eine verschiedene Ebene gibt.

§. 64. Monoklinische Formen.

Da wir für die Krystalle des monoklinischen Systems nur einen Hauptschnitt haben, so gibt es natürlich für solche Krystalle keinerlei Art von Hauptaxen. Indem wir nun h, k, l als rationale und wesentlich positive Grössen voraussetzen, erhalten wir aus dem Schema (XXXIV) mit Hinzunahme der zwei parallelen Flächen den allgemeinsten monoklinischen Holoeder. Da aber letzterer eine offene Form ist, so folgt hieraus, dass in diesem Systeme geschlossene Formen überhaupt nicht möglich sind.

1. Die Hemipyramide $\{hkl\}$, oder $\{\bar{h}kl\}$. Dem ersteren Symbole entspricht eine Form mit den 4 Flächen

$$\left.\begin{matrix} hkl & \bar{h}k\bar{l} \\ h\bar{k}l & \bar{h}\bar{k}\bar{l} \end{matrix}\right\} \ldots\ldots\ldots \text{(XXXV)}$$

deren Symbole sich aus dem einer dieser Flächen ergeben, wenn man zuerst das Zeichen des zweiten Index ändert und zu den so bestimmten zwei Flächen die parallelen sucht. Aendert man in diesem Schema das Zeichen des Index h in das entggeengesetzte um, so erhält man vier Flächen, die der Form $\{\bar{h}kl\}$ entsprechen. Zwei solche Formen, $\{hkl\}$ und $\{\bar{h}kl\}$ kann man als komplementäre bezeichnen, da sie zusammen ein Oktaid bilden. Fig. 211 gibt eine Kombination zweier solcher komplementärer Formen.

Jede Hemipyramide ist eigentlich ein vierseitiges Prisma, da ja ihre 4 triklinischen Flächen in einer Zone liegen. Von den 4 Kanten sind die zwei (K) gleichwerthig, welche in dem Hauptschnitte liegen und durch Punkte welcher die X- und ZAxe gehen; ebenso sind die anderen zwei Kanten (F) gleichwerthig, durch welche die zu ihnen senkrechte YAxe geht.

Je nach der Lage, welche die Pole der Flächen dieser Form mit Bezug auf die Zonenkreise [(100) (010)] und [(001) (010)] haben, Fig. 210, kann man zwischen den folgenden Varietäten dieser Form unterscheiden, für welche jedoch die Art ihrer Symmetrieverhältnisse dieselbe ist.

A. Die positive Hemipyramide $\{hkl\}$, für welche der Pol der Fläche (hkl) in das Dreieck (100) (010) (001) fällt, die Fläche selbst also in dem Oktanten XYZ mit dem stumpfen Axenwinkel XZ liegt.

B. Die negative Hemipyramide $\{\bar{h}kl\}$, bei welcher die Fläche ($\bar{h}kl$) in dem Oktanten $X'YZ$ mit dem spitzen Axenwinkel XZ und der Pol derselben also in dem Dreiecke ($\bar{1}00$) (010) (001) liegt.

C. Das **Prisma** $\{hk0\}$ entsteht dadurch, dass der Pol der Fläche (hkl) in den Zonenkreis [(001) (010)] fällt, wodurch die 4 Flächen dieser Form parallel der ZAxe werden.

D. Das **Klinodoma** $\{0kl\}$, Fig. 213 mit 4 der XAxe parallelen Flächen, deren Pole daher in dem Zonenkreise [(100) (010)] liegen. Alle diese vier Varietäten vertauschen sogleich ihre Rolle, wenn wir als Axenebenen U und W zwei andere Flächen der Zone V wählen.

2. Das **Hemidoma** $\{h0l\}$, oder $\{\bar{h}0l\}$. Die dem ersteren Symbole entsprechende Form ist gebildet von den 2 parellelen Flächen

$$h0l \quad \bar{h}0\bar{l}$$

die zu dieser Form gehörige korrespondirende ist aber durch das zweite Symbol gegeben. Fig. 214 stellt eine Kombination zweier solcher Formen vor. Die zwei Flächen jedes Hemidoma sind monoklinische, da sie senkrecht zum Hauptschnitte und parallel der YAxe sind. Auch hier kann man wieder wie früher zwischen den folgenden Varietäten unterscheiden, je nach der Lage der Pole ihrer Flächen in Fig. 210.

E. Das positive **Hemidoma** $\{h0l\}$, dessen 2 Flächen über dem stumpfen Axenwinkel XZ liegen.

F. Das **negative Hemidoma** $\{\bar{h}0l\}$, mit 2 über dem spitzen Winkel XZ liegenden Flächen.

G. Das **Basopinakoid** $\{001\}$, welches 2 zur Axenebene XY parallele Flächen sind.

H. Das **Orthopinakoid** $\{100\}$ besteht aus zwei Flächen, die parallel der Axenebene YZ sind und natürlich wie die vorhergehenden monoklinisch sind.

3. I. Das **Klinopinakoid** $\{100\}$. Es sind diess 2 dem Hauptschnitte parallele triklinische Flächen

$$010 \quad 0\bar{1}0$$

welche auf der YAxe und auf den Flächen jedes Hemidoma senkrecht stehen.

Die Flächen der drei letzteren Pinakoide wurden benützt, um die Figuren 212 bis 214 damit zu schliessen, von denen also die zwei ersteren eine zweizählige, die letzte aber eine dreizählige Kombination vorstellt.

Hiermit haben wir alle holomorphen monoklinischen Formen erschöpft, da hemiedrische nicht möglich sind. Die Flächen hemiedrischer Formen müssen ja einen Komplex bilden, der nur nach einem Theile der Hauptschnitte des betreffenden Systems isoschematisch ist; ein

Bedingung, welcher in dem gegenwärtigen Falle eines einzigen Hauptschnittes offenbar nicht genügt werden kann.

§. 65. Hemimorphe monoklinische Formen.

Da der einzige Hauptschnitt des monoklinischen Systems mit keiner anderen Ebene gleichwerthig sein kann, so ist mit Bezug auf diesen Hauptschnitt auch eine hemimorphe Ausbildung der im vorhergehenden Paragraphe aufgezählten Formen möglich, mit Ausnahme solcher natürlich, deren Flächen senkrecht zu dem Hauptschnitte sind. Jeder Hemipyramide $\{hkl\}$ entsprechen also zwei hemimorphe Hemipyramiden, $\varrho\{hkl\}$ und $\varrho\{\bar{h}\bar{k}\bar{l}\}$, wovon die eine von den vorderen, die andere von den hinteren zwei Flächen der holomorphen Form gebildet wird.

Dasselbe gilt für das Prisma und das Klinodoma, welche ja nur Varietäten der vorhergehenden Form sind.

Schliesslich entsprechen auch dem Klinopinakoide $\{010\}$ zwei hemimorphe Formen, deren jede nur aus einer einzigen dem Hauptschnitte parallelen Fläche besteht.

§. 66. Monoklinische Kombinationen.

Was den verschiedenen Charakter monoklinischer Kombinationen betrifft, so hat man in Uebereinstimmung mit dem Vorhergehenden nur zwischen holo- und hemimorphen Kombinationen zu unterscheiden. Von beiden Arten wollen wir ein Beispiel betrachten.

Fig. 216 stellt einen Hornblende-Krystall vor; wählt man die Flächen *m* als Prisma $\{110\}$, die Flächen *o* als negative Hemipyramide $\{\bar{1}11\}$, so sind die Elemente dieses Minerals

$$a : b : c = 0{\cdot}5310 : 1 : 0{\cdot}2935, \quad \eta = 104^0\ 58';$$

die Bezeichnung der Kombination aber wird zufolge der Zonenregel

$$\underset{m}{\{110\}}, \quad \underset{o}{\{\bar{1}11\}}, \quad \underset{b}{\{010\}}, \quad \underset{c}{\{001\}}$$

Fig. 215 ist eine hemimorphe Kombination, wie sie am Rohrzucker beobachtet wird; bestimmt man die Elemente etwa durch die Flächen $a(100)$, $c(001)$, $r(101)$, $m(110)$, so werden dieselben den Messungen zufolge

$$a : b : c = 1{\cdot}2595 : 1 : 0{\cdot}8782, \quad \eta = 103^0\ 30'$$

während man mit Hilfe der Zonenregel die folgenden Symbole ableitet:

$\{100\}$, $\{001\}$, $\{101\}$, $\{\bar{1}01\}$, $\{110\}$, $\varrho\{011\}$, $\varrho\{111\}$.
a *c* *r* *p* *m* *q* *o*

Fig. 217 gibt ein Beispiel eines monoklinischen Zwillings, und zwar ist diess ein Penetrations-Zwilling, welcher häufig am Orthoklas ($a : b : c = 0{\cdot}6739 : 1 : 0{\cdot}5686$, $\eta = 116^0\ 2'$) angetroffen wird. Jedes der beiden Individuen ist eine Kombination der Formen $\{110\}$, $\{010\}$, $\{001\}$, $\{\bar{2}01\}$, die Zwillingsaxe aber steht senkrecht auf der Fläche (100). Die Zeichnung ist für den Fall entworfen, dass der ganze Zwilling und die einzelnen Individuen im Gleichgewichte sind, und dass die einander parallelen *Y*Axen der beiden letzteren zusammenfallen.

10. Kapitel.

Die Symmetrieverhältnisse des triklinischen Systems.

§. 67. Triklinische Formen,

Da in diesem Systeme gar kein Hauptschnitt vorhanden ist, so können je drei beliebige Flächen eines triklinischen Krystalles zu Axenebenen gewählt werden; man wählt jedoch wo möglich solche, deren gegenseitige Neigungswinkel sich nicht allzu weit von 90° entfernen. Ebenso können die Axenlängen durch eine beliebige Fläche bestimmt werden, so dass man für die Elemente triklinischer Krystalle

$$a : b : c$$
$$\xi, \ \eta, \ \zeta$$

hat, welche Elemente sich für verschiedene Substanzen durch verschiedene Werthe aller fünf Grössen unterscheiden. Was die Wahl der positiven Halbaxen betrifft, so haben wir folgende zwei Fälle zu unterscheiden, welche für die von drei Linien an ihrem Durchschnittspunkte gebildeten Winkel alle möglichen Fälle vorstellen.

Erstens: von den acht Oktanten haben sechs je einen, zwei aber lauter stumpfe Axenwinkel. In diesem Falle wählen wir die Axenrichtungen eines der letzteren zwei Oktanten zu positiven Halbaxen, so dass alsdann ξ, η und ζ grösser als 90° sind.

Zweitens: von den acht Oktanten haben zwei gar keinen, sechs Oktanten aber je zwei stumpfe Axenwinkel. Hier können wir durch die Wahl eines der letzteren Oktanten nur zwei Axenwinkel, etwa ξ und η grösser als 90° machen.

Was noch die Benennung der Axenrichtungen betrifft, so kann man die so wählen, dass $a > b > c$ wird, diess ist freilich für gegebene

Axenlängen a, b, c nur in dem ersten der beiden angeführten Fälle immer möglich, sollen nämlich die Axenwinkel ξ und η immer stumpf sein. In jedem Falle aber machen wir die grösste Axenlänge gleich eins.

Nähert sich jedoch die Lage der Flächen eines triklinischen Krystalles derjenigen eines zweiten Körpers, der eine ähnliche chemische Zusammensetzung hat, aber in einem anderen Systeme, etwa in dem monoklinischen, krystallisirt, so wählen wir auch für die Axen des triklinischen Krystalles eine Stellung, welche dem Systeme des zweiten Körpers entspricht.

Wie beim rhombischen Systeme kann man auch hier die ZAxe als vertikale Axe, die X- und YAxe aber beziehungsweise als Proto- und Deuterodiagonale bezeichnen. In Folge der Abwesenheit von Hauptschnitten gibt es aber natürlich keine gleichwerthigen Ebenen und Richtungen, sondern je zwei Ebenen oder Richtungen eines triklinischen Krystalles, die nicht einander parallel sind, müssen verschiedene krystallographische und physikalische Eigenschaften besitzen. Die allgemeinste triklinische Form kann daher auch nur aus zwei zu einander parallelen Flächen bestehen, Es ist diess

die Tetartopyramide $\{hkl\}$ mit den Flächen

(XXXVI) . . . . hkl $\bar{h}\bar{k}\bar{l}$

wobei die Indices h, k, l theilweise positiv oder negativ sein können. Da kein Hauptschnitt vorhanden ist, so kann es aber keine speziellen Formen der Tetartopyramide geben, indem ja für solche Formen die Flächennormalen entweder parallel oder senkrecht zu einem Hauptschnitte sein müssen. Man kann jedoch nach der Lage der Flächen der Tetartopyramide gegen die Axenebenen zwischen verschiedenen Varietäten derselben unterscheiden, welche Varietäten freilich ihre Bedeutung verlieren, sobald man drei andere Flächen zu Axenebenen wählt. Auf diese Weise erhalten wir folgende Formen, für welche Fig. 218 eine Uebersicht für die Lage der Pole ihrer Flächen auf der Sphäre der Projektion gibt; die Ebene der Zeichnung ist hierbei senkrecht zur ZAxe.

A. Die Tetartopyramide, bestehend aus zwei parallelen Flächen, die alle drei Axenrichtungen in endlicher Entfernung schneiden. Je nach dem Oktanten, in welchem diese Flächen liegen, erhalten wir eine

obere rechte $\{hkl\}$,
obere linke $\{\bar{h}kl\}$,
untere rechte $\{hk\bar{l}\}$,
untere linke $\{\bar{h}k\bar{l}\}$

Tetartopyramide; h, k, l sind hier als wesentlich positive Grössen vorausgesetzt. Werden die zwei Flächen dieser Form parallel der ZAxe, so erhalten wir

B. das Hemiprisma. Die Pole der zwei parallelen Flächen dieser Form müssen in die Zone [100, 001] fallen; je nach der Lage die sie in dieser Zone haben, unterscheiden wir aber das

rechte $\{hk0\}$ und
linke $\{\bar{h}k0\}$ Hemiprisma.

C. Das Protohemidoma ist eine Tetartopyramide, deren zwei Flächen der XAxe parallel sind. Die Pole der Flächen dieser Varietät fallen daher in die Zone [010, 001], und wir haben je nach der Lage derselben ein

oberes $\{0kl\}$ und ein
unteres $\{0k\bar{l}\}$ Protohemidoma.

D. Das Deuterohemidoma, gebildet von zwei einander und der YAxe parallelen Flächen, deren Pole also in den Zonenkreis [100, 001] entfallen. Wir haben demzufolge wie bei der vorhergehenden Varietät ein

oberes $\{h0l\}$ und ein
unteres $\{h0\bar{l}\}$ Deuterohemidoma.

E. Das Basopinakoid $\{001\}$ ist der spezielle Fall der Tetartopyramide, wenn die Flächen derselben parallel der Axenebene XY werden.

F. Das Protopinakoid $\{010\}$, bestehend aus zwei der Axenebene XZ parallelen Flächen.

G. Das Deuteropinakoid $\{100\}$, dessen zwei Flächen parallel der Axenebene YZ sind.

Abgesehen von diesen verschiedenen Varietäten der Tetartopyramide ist dieselbe die einzige mögliche triklinische Form, indem wegen des Mangels eines Hauptschnittes offenbar weder hemiedrische, noch hemisymmetrische, noch auch hemimorphe Formen in diesem Systeme auftreten können.

§. 68. Triklinische Kombinationen.

Dem im vorhergehenden Paragraphe Gesagten zufolge gibt es nur eine Klasse von Kombinationen des triklinischen Systems, welche sich freilich durch die Zahlenwerthe ihrer Elemente und Flächenindices mehr von einander unterscheiden können.

In Fig. 219 ist als Beispiel einer triklinischen Kombination ei Krystall des Kupfervitriols abgebildet. Bestimmt man die Ele mente desselben etwa durch die Flächen $a(100)$, $p(110)$, $b(010)$ $q(201)$, $n(2\bar{1}1)$, so erhält man aus der Beobachtung die Werthe

$$a : b : c = 1 : 0{\cdot}5656 : 0{\cdot}5499$$
$$\xi = 106^0\ 49',\ \eta = 97^0\ 39',\ \zeta = 77^0\ 37';$$

für die Formen der betrachteten Kombination findet man aber d Symbole

$\{100\}$, $\{010\}$, $\{110\}$, $\{\bar{1}10\}$, $\{210\}$, $\{201\}$, $\{2\bar{1}1\}$, $\{\bar{1}\bar{1}1\}$, $\{\bar{2}\bar{1}1\}$
a *b* *n* *m* *p* *q* *r* *o* *s*

Fig. 220 ist ein Beispiel eines triklinischen Juxtapositions-Zw lings, welcher am Albit beobachtet wird. Die Elemente dieses Min rals sind

$$a : b : c = 0{\cdot}6318 : 1 : 0{\cdot}5553$$
$$\xi = 85^0\ 58',\ \eta = 115^0\ 58',\ \zeta = 91^0\ 50'$$

und kommen denen des monoklinischen Orthoklases (§. 66) zieml nahe; da der Albit dem letzteren Minerale auch in chemischer Hinsi verwandt ist, so wählen wir für denselben auch eine dem Orthokl entsprechende Axenstellung. Jedes der beiden Individuen ist dann bildet von Flächen der Formen $\{001\}$, $\{110\}$, $\{010\}$, $\{\bar{1}10\}$, $\{\bar{1}1$ $\{\bar{1}\bar{1}1\}$, und die Zwillingsaxe ist senkrecht zur Fläche $\{010\}$.

11. Kapitel.

Zeichnung der Krystallgestalten.

§. 69. Orthogonale Projektion.

Das Problem, eine Krystallgestalt richtig zu zeichnen, zerfällt ch dem, was in vorhergehenden Kapiteln über die Eigenschaften der ystalle gesagt wurde, offenbar in die zwei Aufgaben: erstens das ensystem des Krystalles richtig zu zeichnen, und zweitens auf se Axen die Parameter seiner einzelnen Flächen gehörig aufzutragen. nn kennt man die Lage der Punkte, in denen zwei Flächen die drei enrichtungen treffen, so kennt man nach §. 3 auch die Lage der chschnittslinie derselben. Die Zeichnung eines Krystalles ist aber hts anderes, als die Darstellung aller Kanten desselben, d. h. der ien, in denen sich je zwei benachbarte Flächen desselben schneiden. durch, dass man die Zeichnung einer Krystallgestalt bloss mit Hilfe ner Elemente und Indices ausführen kann, unterscheidet sie sich als fsmittel unserer Vorstellungskraft wesentlich von einem Modelle der stalt, welches wir nur anfertigen können, wenn uns die Neigungen Flächen des Krystalles zu einander bekannt sind. Da nun gerade Elemente und Indices diejenigen Grössen sind, welche die Gesetze Krystallographie unmittelbar erkennen lassen, so müssen wir, wenn ich darum handelt, die Eigenschaften und Verhältnisse einer Kry- llgestalt zu studiren, dem Zeichnen der letzteren den Vorzug geben, z abgesehen davon, dass man zur Anfertigung eines Modelles erst ner Apparate bedürfte.

Dass aber die Aufgabe, die wir uns in diesem Kapitel gestellt en, nämlich Zeichnungen von Krystallgestalten zu entwerfen, die unser Auge denselben Eindruck machen, wie die Gestalten selbst,

eine mögliche ist, davon überzeugt man sich auf folgende Weise. Ziehen wir nämlich von allen bemerkenswerthen Punkten eines Körpers gerade Linien zu einem unserer Augen, schneiden diese Geraden durch eine beliebige Ebene *M* und verbinden die so erhaltenen Durchschnittspunkte genau so, wie sie an dem betrachteten Körper verbunden sind; so erhält man eine Figur, die auf unser Auge genau denselben Eindruck hervorbringt, wie der Körper selbst, so dass es gleichgiltig ist, ob bloss der Körper, oder die Zeichnung auf der Ebene *M* vorhanden ist. Man nennt eine solche Zeichnung eine perspektivische Projektion des Körpers auf die Ebene *M*, welch letztere die Bildebene oder Projektionsebene heisst; die Geraden aber, welche die einzelnen Punkte des Körpers mit dem Auge verbinden, und durch deren Durchschnitt mit der Ebene *M* die Projektion des Körpers gebildet wird, nennt man Gesichtsstrahlen oder projizirende Linien.

Wir erhalten also, wenigstens in Betreff der geometrischen Verhältnisse eines Körpers genau dasselbe Bild, sei es, dass wir denselben selbst, oder sei es, dass wir nur dessen zugehörige Projektion betrachten, vorausgesetzt freilich, dass wir unser Auge bei der Betrachtung der Projektion in dieselbe Stellung zu deren Ebene bringen, die es bei der Projizirung gegen dieselbe hatte.

Während das Bild, unter welchem uns ein Körper erscheint, nur von der Stellung des letzteren gegen unser Auge abhängt, wird ersichtlich die Projektion dieses Körpers auch von der Lage der Bildebene bedingt. Bei der Zeichnung von Krystallgestalten werden wir nun die Stellung derselben und die Lage der Bildebene so zu wählen haben, dass die eigenthümlichen Verhältnisse der Krystalle dabei möglichst deutlich hervortreten. Es wird diess, wie Nachfolgendes lehrt, am besten dadurch erreicht, dass man vor Allem das Auge in unendliche Entfernung von dem zu projizirenden Krystalle und von der Bildebene versetzt. Hiedurch werden offenbar alle Gesichtsstrahlen einander parallel, daher auch die von ihnen gebildete Projektion eine Parallelprojektion (parallelperspektivische Projektion) genannt wird, zum Unterschiede von den eigentlich perspektivischen Projektionen, die für eine endliche Entfernung des Auges ausgeführt werden, wie diess bei Landschaftszeichnungen u. s. f. der Fall ist.

In der Parallelprojektion eines Körpers sind nun fürs erste parallele Linien desselben noch immer parallel, wie aus der folgenden Betrachtung hervorgeht. Die Gesichtsstrahlen aller Punkte einer Geraden liegen ersichtlich sämmtlich in einer Ebene, welche durch das Auge geht und projizirende Ebene genannt wird. Legt man durch

parallele Linien Ebenen, so sind letztere alle tautozonal und ihre Durchschnittslinien daher ebenfalls parallel den ursprünglichen Linien. Die Durchschnittslinie der projizirenden Ebenen zweier parallelen Linien ist somit ebenfalls parallel diesen Linien und geht durch das Auge. Ist nun das Auge unendlich weit entfernt von den parallelen Linien, so werden die projizirenden Ebenen derselben einander parallel sein müssen, da ja alsdann jeder Punkt ihrer Durchschnittslinie in unendliche Entfernung rückt. Sind aber die projizirenden Ebenen parallel, so sind es natürlich auch die Durchschnittslinien derselben mit der Bildebene, welche Durchschnittslinien eben die Projektionen der betrachteten parallelen Linien sind.

Aus dem eben Bewiesenen folgt unmittelbar, dass die Parallelprojektion eines Parallelogrammes wieder ein Parallelogramm ist, da ja die gegenüberliegenden parallelen Seiten in der Projektion parallel bleiben müssen. Hieraus ergibt sich aber sogleich die folgende zweite wichtige Eigenschaft der Parallelprojektion, nämlich die, dass gleich lange parallele Linien in dieser Projektion nicht nur parallel, sondern auch gleich lang sind. Denn verbinden wir die entsprechenden Endpunkte der gegebenen Linien durch Gerade, so erhalten wir ein Parallelogramm, dessen Projektion eine ähnliche Figur sein muss, was eine gleiche Länge der gegebenen Linien auch in der Projektion voraussetzt.

Verhalten sich die Längen zweier parallelen Linien etwa wie m zu n, wobei m und n ganze Zahlen bedeuten sollen, und theilen wir die erste Linie in m, die zweite in n gleiche Theile, so bekommen wir $m+n$ Stücke, alle von gleicher Länge, deren Parallelprojektionen daher dem Gesagten zufolge ebenfalls unter einander gleich lang sein müssen. Diess gibt uns unmittelbar den Satz:

Bei der Parallelprojektion ist das Längenverhältnis paralleler Linien gleich dem Verhältnisse ihrer Projektionen.

Dieser Satz wird natürlich auch noch gelten, wenn die parallelen Linien unendlich nahe einander liegen, d. h. wenn sie Stücke einer und derselben Geraden bilden. Es ergibt sich hieraus für Punkte derselben Linie eines Körpers, dass deren wechselseitige Entfernung in der Projektion gerade so gefunden werden kann, wie am Körper selbst; nämlich durch Messen mit einer bestimmten Längeneinheit. Diese Einheit wird aber in der Projektion für jede verschiedene Richtung der betrachteten Geraden auch eine verschiedene Länge haben, und nur für Linien, welche der Bildebene parallel sind, wird diese Einheit dieselbe Länge wie für den Körper selbst haben. Es kann geschehen, dass verschiedene Richtungen des Körpers in der Projektion parallel werden, trotzdem

entsprechen diesen verschiedenen Richtungen noch immer in der Projektion verschiedene Längeneinheiten.

Die zuletzt besprochene Eigenschaft der Parallelprojektion macht die so oft wiederkehrende Aufgabe des Krystallzeichnens, nämlich die Parameter einer Fläche (hkl) auf den Axen aufzutragen, sehr leicht: Denn ist einmal das Axensystem projizirt, so hat man nur die Axenlängen auf ihren betreffenden Richtungen vom Mittelpunkt aus beziehungsweise $\frac{1}{h}$, $\frac{1}{k}$, $\frac{1}{l}$ aufzutragen, um die gesuchten Parameter zu erhalten.

Was nun die Lage der Bildebene betrifft, so ist die Folge des Parallelismus der Bildstrahlen die Entfernung dieser Ebene vom betrachteten Körper ganz gleichgiltig, mit Bezug auf die Neigung der Bildebene zu den Gesichtsstrahlen aber nehmen wir an, dass sie auf den letzteren senkrecht stehe. Wie schon gesagt, müssen wir nämlich, damit eine Zeichnung denselben Eindruck auf unser Auge hervorbringe, wie der projizirte Körper selbst, das Auge in dieselbe Lage zur Zeichnung bringen, die es bei Anfertigung der letzteren hatte. Nun betrachten wir gewöhnlich eine Zeichnung immer in der Weise, dass die Verbindungslinie des Auges mit dem Mittelpunkte der Zeichnung senkrecht zur Ebene der letzteren ist. Wir werden daher auch bei der Projizirung von Krystallgestalten die Bildebene senkrecht zu den Gesichtsstrahlen annehmen.

Eine solche Projektion nun, in welcher sämmtliche Gesichtsstrahlen normal zu der Bildebene sind, heisst eine orthogonale Projektion oder bloss eine Projektion, indem man dieses Wort vorzugsweise auf die eben beschriebene Art von Projektionen anwendet, wie diess auch im Nachfolgenden geschieht. Durch ganz einfache geometrische Betrachtungen überzeugt man sich aber von der Richtigkeit des folgenden Satzes:

„In der orthogonalen Projektion ist die Entfernung zweier Punkte, deren Verbindungslinie im Raume mit den Gesichtsstrahlen den Winkel α bildet, gleich der Kathete eines rechtwinkeligen Dreieckes, dessen Hypothenuse die wirkliche Entfernung der zwei Punkte ist, und in welcher jener Kathete der Winkel α gegenüber liegt."

Aus diesem Satze folgt, was jedoch schon unmittelbar einleuchtet, dass eine zur Bildebene parallele Linie in der Projektion die gleiche Länge behält, und dass jede zur Bildebene senkrechte Linie sich in der Projektion auf einen Punkt reduzirt.

Haben wir auf diese Art Entfernung und Lage der Bildebene bestimmt, so bleibt uns nur noch übrig, die Lage des zu projizirenden Krystalles gegen die Gesichtsstrahlen oder gegen die Bildebene zu fixiren. Die Stellung des Krystalles wird aber bestimmt sein durch die Stellung seiner Axenrichtungen: da ja mit Hilfe derselben der ganze Krystall gezeichnet werden kann; um aber die Axenrichtungen zu fixiren, brauchen wir nur das Verhältnis der drei Parameter anzugeben, welche von der Bildebene auf diesen Axenrichtungen abgeschnitten werden. Indem wir nun das Problem der Projektion einer Krystallgestalt für beliebige Parameter der Bildebene lösen, werden wir natürlich auch zugleich gezeigt haben, wie man einen Krystall auf eine seiner Flächen projiziren könne; in welchem Falle die Parameter der Projektionsebene sich wie rationale Grossen verhalten.

Ist die Bildebene senkrecht zu einer Zone des Krystalles, so werden alle Flächen dieser Zone in der Projektion nur als gerade Linien erscheinen, die sich unter Winkeln gleich den Neigungswinkeln der betreffenden Flächen schneiden. Der Umriss dieser Flächen wird daher aus der Projektion nicht ersichtlich sein. Diess ist nun der Fall bei den Horizontalprojektionen, bei welchen die Bildebene horizontal ist. Da wir nämlich die Krystallgestalten der verschiedenen Systeme immer so zeichnen, dass eine ihrer Zonen vertikal ist, so wird bei jedem Krystalle eine horizontale Ebene immer senkrecht zu einer seiner möglichen Zonen sein, deren Axe mit Ausnahme des hexagonalen Systems immer die *Z*Axe ist. Diese Axe wird somit in der Horizontalprojektion immer nur als Punkt erscheinen, und es wird nicht zu erkennen sein, wie sich verschiedene Krystallflächen mit Bezug auf diese Axe verhalten; die räumlichen Verhältnisse der Krystalle werden somit durch solche Projektionen nur unvollkommen dargestellt, haben jedoch wegen ihrer leichteren Anfertigung besonders dann Werth, wenn es sich mehr um eine schematische Uebersicht der Flächen eines Krystalles handelt.

Aehnliche Bemerkungen gelten für die Vertikalprojektion, bei der die Bildebene senkrecht zu einer horizontalen Zone des Krystalles angenommen wird. Solche Zonen gibt es an triklinischen Krystallen allerdings keine, an monoklinischen aber gibt es eine solche, deren Axe die *Y*Axe ist, wodurch der Hauptschnitt dieser Krystalle bei der Vertikalprojektion zur Bildebene wird. Die Anwendung dieser Projektion beschränkt sich daher auch meist auf den Fall monoklinischer Krystalle, deren allgemeine Verhältnisse dadurch allerdings, besonders mit Rücksicht auf die physikalischen Eigenschaften sehr gut dargestellt werden.

Obgleich nun diese Projektionen für gewisse Zwecke sehr brauchbar sind, so findet doch, wenn die Ausbildung der Flächen eines Krystalles durch Zeichnung versinnlicht werden soll, die axonometrische oder schiefe Projektion die meiste Anwendung; bei derselben soll die Bildebene zu gar keiner, wenigstens der vorherrschenden Zonen des Krystalles senkrecht sein, indem sonst die Verhältnisse einer solchen Zone aus der Zeichnung nicht ersichtlich werden.

§. 70. Parallelprojektion eines rechtwinkligen Axensystems.

Da wir sehen werden, dass man die Projektion jedes schiefwinkligen Axensystems mit Hilfe der Zeichnung eines rechtwinkligen finden kann, so wollen wir hier auch nur die allgemeine Methode der schiefen Projektion eines rechtwinkligen Axensystems betrachten. Dieselbe erfordert aber zuerst die Lösung des folgenden Problems:

1. Aufgabe. Für ein rechtwinkliges Axensystem seien m, n, p die Parameter einer Ebene Q, es soll das Dreieck MNP und der Punkt E angegeben werden, in welchem dieselbe von den Axenebenen und von der aus dem Axenmittelpunkte auf sie gefällten Senkrechten getroffen wird.

Den Weg, auf welchem diese Aufgabe zu löseu sein wird, finden wir durch folgende Betrachtung. Sind OM, ON, OP, Fig. 221, der Grösse und Richtung nach die Parameter der Ebene Q, ist ferner E der Punkt, in welchem das Dreieck MNP von der aus O auf dasselbe gefällten Normale getroffen wird, so wird die Linie PE senkrecht sein zur Linie MN. Die Ebene POE ist nämlich senkrecht zu den beiden Ebenen MNP und MON, da sie durch die Linien EO und PO hindurchgeht, welche beziehungsweise senkrecht zu jenen zwei Ebenen sind. Die Durchschnittslinie MN der letzteren zwei Ebenen muss daher senkrecht zur Ebene POE und somit auch senkrecht zur Linie PE sein. Dasselbe gilt aber auch in Betreff der Linien ME und NE, woraus hervorgeht, dass E der Durchschnittspunkt der drei Höhen des Dreieckes MNP ist. Hiedurch ist aber der Punkt E sogleich gegeben, sobald man die wahre Gestalt des Dreieckes MNP kennt. Die Seiten des letzteren findet man aber leicht aus den rechtwinkligen Dreiecken NOP, POM, MON, deren Katheten die gegebenen Parameter der Ebene Q sind. Man hat somit zur Lösung der gestellten Aufgabe folgende Konstruktion auszuführen:

Auflösung. Man ziehe die Linien, Fig. 222,

$$MN \perp PN_1$$

und trage von dem Durchschnittspunkte O derselben mit der gegebenen

oder willkürlichen Längeneinheit die Linien

$$OM = m,\ ON_1 = ON = n,\ OP = p$$

auf. Bestimmt man dann den Punkt N_2 so, dass

$$PN_2 = PN,\ MN_2 = MN_1$$

so gibt das Dreieck MN_2P den gesuchten Querschnitt der Ebene Q mit den Axenebenen, der Kreuzungspunkt E der drei Höhen dieses Dreieckes aber den gesuchten Fusspunkt der von O auf die Ebene Q gefällten Normale.

Werden zwei der drei Parameter m, n, p einander gleich, so wird natürlich die entsprechende Seite des Dreieckes MN_2P von der zugehörigen Höhe halbirt. Ist einer der drei Parameter $= \infty$, so konstruire man mittelst der beiden anderen als Katheten ein rechtwinkliges Dreieck. Errichtet man in den Endpunkten der Hypothenuse zwei zu ihr senkrechte Linien, so geben diese Linien sammt der Hypothenuse die Durchschnitte der Ebene Q mit den Axenebenen, der Punkt E aber, in welchem die Hypothenuse von der zugehörigen Höhe getroffen wird, den Fusspunkt der vom Axenmittelpunkte auf die Ebene Q gefällten Normale. Die Richtigkeit dieser Konstruktion ergibt sich leicht durch Betrachtung der Fig. 221 für den Fall, dass einer der Punkte M, N, P in die Unendlichkeit rückt.

2. Aufgabe. Ein rechtwinkliges Axensystem in paralleler Perspektive auf eine Ebene Q zu projiziren, deren Parameter mit Bezug auf dieses Axensystem m, n, p sind.

Es seien, Fig. 221, OA, OB, OC der Länge und Richtung nach die gegebenen Axen OM, ON, OP aber die Parameter der Projektionsebene Q. Die Projektionen der Punkte A, B, C, O auf die Ebene Q werden uns ersichtlich durch ihre Verbindungslinien die gesuchte Projektion des Axensystems geben; diese projizirten Punkte A', B', C', E sind aber nichts weiter als die Fusspunkte der von den Punkten A, B, C, O auf die Ebene Q gefällten Senkrechten, da wir ja immer die Gesichtslinien senkrecht zur Projektionsebene annehmen. Die Punkte A', B', C' werden in die Verbindungslinien des Punktes E mit den Punkten M, N, P fallen müssen, indem die Linien AA', BB', CC', OE sämmtlich einander parallel sind. Es wird daher auch

$$\frac{EA'}{EM} = \frac{OA}{OM} = \frac{a}{m},\quad \frac{EB'}{EN} = \frac{OB}{ON} = \frac{b}{n},$$

$$\frac{EC'}{EN} = \frac{OC}{ON} = \frac{c}{n}$$

sein, mit Hilfe welcher Gleichungen wir die Lage der Punkte A', B', C,

leicht ermitteln können, sobald wir nur die wahre Gestalt des Dreieckes MNP und den Punkt E desselben bestimmt haben. Die Lösung der gestellten Aufgabe erfordert somit die Ausführung der folgenden Konstruktion.

Auflösung. Man bestimme, Fig. 223, zuerst mit Hilfe der vorhergehenden Auflösung das Dreieck $M'N'P'$ und den Punkt E desselben, in welchem die Ebene Q von den Axenebenen und von der vom Axenmittelpunkte auf sie gefällten Normale getroffen wird. Alsdann trage man vom Punkte E aus auf drei beliebigen Linien beziehungsweise die Längen

$$EA = a, \quad EB = b, \quad EC = c$$

und

$$EM = m, \quad EN = n, \quad EP = p$$

auf, und ziehe durch die so bestimmten Punkte ABC die Parallelen

$$AA' \parallel MM', \quad BB' \parallel NN', \quad CC' \parallel PP',$$

welche die Linien EM', EN', EP', beziehungsweise in den Punkten A', B', C' schneiden. Die EA', EB', EC' geben schliesslich der Länge und Richtung nach die gesuchte Projektion des gegebenen rechtwinkligen Axensystems.

Anmerkung. Bedeutet f den Flächeninhalt des Dreieckes $M'N'P'$, so findet man mittelst ebener Geometrie $4f \,.\, EM' = N'P' \,(-\, N'P'^2 + M'P'^2 + M'N'^2)$. Nun ist aber offenbar $N'P' = \sqrt{n^2 + p^2}$, $P'M' = \sqrt{m^2 + p^2}$, $M'N' = \sqrt{m^2 + n^2}$, und daher $4f = \sqrt{n^2p^2 + p^2m^2 + m^2n^2}$. Aus der vorhergehenden Gleichung für $4f \,.\, EM'$ erhält man somit $EM' = (m^2\sqrt{n^2 + p^2}) : \sqrt{n^2p^2 + p^2m^2 + m^2n^2}$, in Folge dessen aber für EA' die erste der nachstehenden Gleichungen, deren zwei letzte sich schon durch die Symmetrie der Buchstaben ergeben:

$$EA' = ma \sqrt{\frac{n^2 + p^2}{n^2p^2 + p^2m^2 + m^2n^2}}, \quad EB' = bn \sqrt{\frac{p^2 + m^2}{n^2p^2 + p^2m^2 + m^2n^2}}$$

$$EC' = pc \sqrt{\frac{m^2 + n^2}{n^2p^2 + p^2m^2 + m^2n^2}}$$

§. 71. Andere Methode der Projektion eines tesseralen Axensystems.

Der vorige Paragraph gibt uns eine Methode, mit welcher wir direkt die Projektion jedes schiefwinkeligen Axensystems finden können. Wir werden jedoch sehen, dass, wenn es sich nicht gerade um die Projektion auf eine bestimmte Ebene handelt, man eine richtige Projektion eines schiefwinkligen Axensystems auch immer mit Hilfe der Projektion dreier zu einander senkrechten und gleich langen Linien, also eines

tesseralen Axensystems ausführen kann. Aber auch für die Projektion des letzteren Axensystems schlägt man gewöhnlich nicht die Methode des vorigen Paragraphes ein, da es sich im Allgemeinen beim Zeichnen der Krystalle nicht um eine bestimmte Projektionsebene handelt. Man bedient sich bei der Projektion eines tesseralen Axensystems vielmehr meist der nachfolgenden Methode, welche hauptsächlich auf dem im §. 69 gegebenen Satze beruht, der uns die projicirte Länge einer Linie aus deren wahrer Länge und aus dem Winkel dieser Linie mit den Gesichtsstrahlen finden lehrt.

Schneiden wir auf den drei rechtwinkligen Axen OX, OY, OZ vom Mittelpunkte aus die gleich langen Stücke OA, OB, OC ab, die auch gleich der Längeneinheit l etwa sein sollen, so werden die vier Punkte O, A, B, C die Ecken einer dreiseitigen Pyramide sein, deren Projektion wir eben suchen wollen. Die Axe OZ denken wir uns wie gewöhnlich vertikal. Zeichnen wir uns nun mit den Linien $OA = OC$ das rechtwinklige Dreieck OAC, Fig. 224, wobei OC vertikal sein soll, so wird uns dasselbe die Projektion der erwähnten Pyramide auf eine Ebene parallel der vertikalen Axenebene XZ vorstellen. Die Punkte A, O, C der Pyramide, die sich also in einer Ebene parallel der Projektionsebene befinden, werden daher ihre gegenseitige Distanz auch in der Projektion behalten; die Punkte O und B dagegen werden zusammenfallen, weil ihre Verbindungslinie parallel den Gesichtsstrahlen ist. In Folge dessen werden wir die Seiten AOB und OBC der Pyramide nur als Linien OA und OC sehen.

Drehen wir nun bei unveränderter Lage der Projektionsebene um eine vertikale Ebene, also etwa um die Linie OC um den Winkel δ (den Drehungswinkel), so wird die Lage der Punkte O und C sich nicht ändern, dagegen wird A etwa nach A' und B von O nach B' rücken. Die Seite AOB der Pyramide wird aber immer nur als gerade Linie erscheinen. Wenn wir aber nun ferner die Pyramide um eine zur Projektionsebene parallele Horizontale also etwa um die ursprüngliche Linie OA um den Elevationswinkel ε drehen, so wird der Punkt C offenbar nur in der Linie OC verschoben und etwas nach C'' rücken. Sind ferner A'' und B'' die neuen Lagen der Punkte A' und B', so werden auch die Linien $A'A''$ und $B'B''$ senkrecht zu $A'B'$ sein müssen. Die Verbindungslinie der vier Punkte gibt uns schliesslich die den Winkeln δ und ε entsprechende schiefe Projektion der Pyramide $ABCO$.

Diese beschriebenen Operationen sind nun wirklich auszuführen, d. h. es sind die Längen der Linien OA', OB', OC'', $A'A''$, $B'B''$, welche uns die Lage der Punkte A'', B'', C'' ersichtlich geben, zu

bestimmen. Um nun mit Hilfe des im §. 69 gegebenen Satzes zuerst die Längen von $A'O$ und $B'O$ zu finden, brauchen wir nur zu bedenken, dass nach der ersten Drehung um OC die Axen OA und OB mit den Sehlinien offenbar die Winkel $90^0 - \delta$ und δ bilden. Wir haben daher folgende Konstruktion auszuführen. Man mache Fig. 224

$$COA = 90^0,\ A_0OA = \delta,\ A_0OB_0 = 90^0$$
$$OC = OA_0 = OB_0 = l$$

und suche auf der Linie OA die Punkte A' und B', für welche

$$OA'A_0 = OB'B_0 = 90^0$$

alsdann sind OA' und OB' die gesuchten Längen. Dreht man nun die Pyramide um die Linie OA, so wird C'' die Projektion des Punktes C immer näher gegen O rücken, je mehr man die Pyramide neigt. Fällt schliesslich C'' mit Q zusammen, so müssen die Punkte A' und B' mit den Punkten A_0 und B_0 koinzidiren. Da man so die wahren Längen von A_0A', B_0B', OC kennt, so ist es leicht, ihre Projektion für eine beliebige Neigung ε der Pyramide zu bestimmen, da sie alsdann mit den Sehlinien in Wirklichkeit offenbar der Reihe nach die Winkel ε, ε, $90^0 - \varepsilon$ bilden. Man mache also Fig. 225

$$EQG = 90^0,\ GQG' = \varepsilon$$
$$EQ = A_0A',\ FQ = B_0B',\ QG = OC = C$$

und bestimme auf der Linie $G'Q$ die Punkte E', F', G', für welche

$$EE'Q = FF'Q = GG'Q = 90^0;$$

die Stücke $E'Q$, $F'Q$, $G'Q$ sind alsdann die gesuchten Längen von $A'A''$, $B'B''$, CC''. Macht man daher in Fig. 224 noch

$$A'A'' = E'Q,\ B'B'' = F'Q,\ OC' = G'Q$$

so geben uns die Linien $A''O$, $B''O$, $C''O$ eine richtige schiefe Projektion eines tesseralen Axensystems.

Setzt man in Fig. 224 das Verhältnis $\frac{OA'}{A_0A'}$, dessen Werth natürlich von dem Winkel δ abhängt, gleich r, so erhält man aus den kongruenten und rechtwinkligen Dreiecken A_0OA' und B_0OB' leicht

$$(1) \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} OA' = B_0B' = \dfrac{rl}{\sqrt{1 + r^2}} \\ OB' = A_0A' = \dfrac{l}{\sqrt{1 + r^2}} \end{array} \right.$$

Aus der Fig. 225 folgt aber, da die Dreiecke QEE', QFF', QGG' alle einander ähnlich sind, dass die folgenden Verhältnisse einen und denselben Werth, s etwa, haben müssen, der natürlich von der Grösse des Winkels ε abhängt. Wir können daher setzen

$$\frac{AA'}{A'A''} = \frac{BB'}{B'B''} = \frac{l}{GG'} = s$$

und da das Dreieck $GG'Q$ ein rechtwinkliges ist

$$QG' = OC'' = \sqrt{l^2 - GG'^2}$$

Aus diesen und den Gleichungen (1) findet man aber

$$\left.\begin{aligned} A'A'' &= \frac{l}{s\sqrt{1+r^2}} \\ B'B'' &= \frac{rl}{s\sqrt{1+r^2}} \\ OC'' &= \frac{l}{s}\sqrt{s^2-1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ (2)$$

welche Gleichungen in Verbindung mit den Gleichungen (1) ersichtlich die zur Bestimmung der Punkte A'', B'', C'' nothwendigen Linien in Theilen der Längeneinheit durch die Zahlen r und s ausgedrückt geben. Mit Hilfe dieser Gleichungen kann man also auch auf dem Wege der Rechnung zur Kenntnis der Bestimmungsstücke einer richtigen schiefen Projektion eines tesseralen Axensystems gelangen.

Der Bruch $\frac{1}{s}\sqrt{s^2 - 1}$ wird sich bei den für q gewöhnlich angenommenen Werthen sehr wenig von Eins unterschieden und daher bei den üblichen Grössenverhältnissen der Krystallzeichnungen der Punkt C'' fast genau mit C zusammenfallen. Wir können daher für OC'' meist den Näherungswerth $OC = l$ setzen.

Kommt es nicht darauf an, dass die Linien OA'', OB'', OC'' gerade die projizirte Längeneinheit bedeuten, sondern nur die Projektionen dreier gleich langen Linien seien, so können wir OB' gleich Eins setzen und erhalten so, indem wir die Gleichungen (1) und (2) durch den Werth von OB' aus den Gleichungen (1) dividiren

$$\left.\begin{aligned} &OA' = r,\quad OB' = 1 \\ &A'A'' = \frac{1}{s},\quad B'B'' = \frac{r}{s} \\ &OC'' = \frac{1}{s}\sqrt{s^2-1}\,.\,\sqrt{1+r^2} = \sqrt{1+r^2}\ \text{approximativ.} \end{aligned}\right\} \ .\ (3)$$

Anmerkung. Wir kennen jetzt zwei Methoden, ein tesserales Axensystem zu projiziren. Es ist klar, dass, wenn wir nur einerseits die Grössen m, n, p, andererseits r und s richtig wählen, die projizirten Längen der Axen in beiden Fällen gleich gross ausfallen müssen, und dass alsdann dem §' 70 zufolge die nachstehenden Gleichungen gelten:

$$OA'' = \sqrt{OA'^2 + A'A''^2} = \frac{l}{s}\sqrt{\frac{r^2s^2+1}{1+r^2}} = lm^2\sqrt{\frac{n^2+p^2}{n^2p^2+p^2m^2+m^2n^2}}$$

$$OB'' = \sqrt{OB'^2+B'B''^2} = \frac{l}{s}\sqrt{\frac{r^2+s^2}{1+r^2}} = ln^2\sqrt{\frac{m^2+p^2}{n^2p^2+p^2m^2+m^2n^2}}$$

$$OC'' = \frac{l}{s}\sqrt{s^2-1} = lp^2\sqrt{\frac{m^2+n^2}{n^2p^2+p^2m^2+m^2n^2}}$$

worin m, n, p die Parallelen der Projektionsebene bedeuten. Diese Gleichungen sind eigentlich nur zwei von einander verschiedene, denn sie geben quadrirt und addirt beiderseits die Summe 2. Man kann aus denselben daher auch nur das Verhältnis der drei Grössen m, n, p bestimmen; für diess erhält man aber

$$m : n : p = \sqrt{r^2+1} : \frac{1}{s}\sqrt{r^2+1} : \sqrt{s^2-1}$$

Mit Hilfe dieser Doppelgleichung können wir nun für ein beliebig angenommenes r und s die Parameter der Projektionsebene berechnen; aus denselben findet man aber leicht die folgenden Gleichungen

$$r = \frac{m}{n}, \quad s = \frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

welche uns zeigen, wie man aus den Parametern der Projektionsebene den Drehungs- und Elevationswinkel finden könne.

Will man von den Formeln der ebenen Trigonometrie Gebrauch machen, so hat man offenbar

$$r = \cot\delta, \quad s = \frac{1}{\sin\varepsilon}$$

$$m : n : p = 1 : \cot\delta : \cot\varepsilon \sin\delta$$

Ebenso findet man leicht

$$\cot A'OA'' = rs, \quad \cot B'OB'' = \frac{s}{r}$$

durch welche Gleichungen in Verbindung mit den früher gefundenen

$$OA'' = \frac{l}{s}\sqrt{\frac{r^2s^2+1}{1+r^2}}, \quad OB'' = \frac{l}{s}\sqrt{\frac{r^2+s^2}{1+r^2}}, \quad OC'' = \frac{l}{s}\sqrt{s^2-1}$$

ersichtlich ebenfalls die Lage der projizirten Axen vollkommen bestimmt wird.

Man wählt bei der Ausführung von Krystallzeichnungen gewöhnlich für r und s ganz einfache Zahlen. Zu empfehlen sind die auch von **Naumann** gebrauchten Werthe $r = 3$ und $s = 9$, welche einen

Drehungswinkel $\delta = 18^0\ 26'$ und Elevationswinkel $\varepsilon = 6^0\ 23'$ entsprechen und für welche sich aus den Formeln der vorstehenden Anmerkung die folgenden Werthe ergeben:

$$A''OC'' = 92^0\ 7'.2 \quad B''OC'' = 108^0\ 25'.9$$

$$OA'' = 0{\cdot}9382 . l, \quad OB'' = 0{\cdot}3333 . l \quad OC'' = 0{\cdot}9938 . l$$

Setzt man aber, wenn es auf die absolute Länge der projizirten Axen nicht ankommt, die der dritten gleich Eins, so hat man

$$OA'' = 0{\cdot}9553 \quad OB'' = 0{\cdot}3928 \quad OC'' = 1.$$

Diese Zahlenwerthe können dazu dienen, eine Normalprojektion anzufertigen, falls man die direkte Konstruktion derselben nicht vorziehen sollte. Man zeichnet eine solche Normalprojektion auf etwas stärkeres Papier und theilt jede der drei Axen etwa in 50 gleiche Theile, so dass jeder der letzteren die Projektion eines Millimeters ist, falls l zu einem halben Decimeter angenommen wurde. Indem man nun auf passende Weise aus der Masse des Papieres drei Dreiecke so ausschneidet, dass eine Seite jeder der positiven Halbaxen dadurch frei wird, erhält man die Projektion eines tesseralen Axensystems, der man sich nach Art eines Massstabes oder eines Transporteurs bedienen kann, um nicht für jede einzelne Krystallzeichnung die Projektion dreier rechtwinkliger Axen wiederholen zu müssen.

Mit diesen Werthen für r und s sind die Figuren der Tafel IV und V ausgeführt, mit Ausnahme der Figur 168, welche sowie die Figuren der Tafel III für die Werthe $r = 4$, $s = 9$ gezeichnet sind. Fallen nämlich bei der Projektion eines Krystalles wichtige Kanten desselben in eine einzige Linie zusammen, so ist es besser, wenn man den Abstand der einzelnen Flächen vom Mittelpunkte nicht ändern kann, oder diess auch nichts helfen würde, dass man dann zur Projektion des Axensystems einen etwas anderen Drehungswinkel wählt. Ebenso kann es geschehen, dass eine ganze Fläche in der Projektion nur als Linie erscheint. In diesem Falle dreht man entweder ebenfalls das Axensystem oder man ändert die Indices der Flächen etwas wenig, natürlich aber nur dann, wenn die Zonenverhältnisse der Zeichnung dadurch nicht gestört werden.

§. 72. Horizontal- und Vertikalprojektion eines beliebigen Axensystems.

Aufgabe. Ein gegebenes Axensystem auf eine Ebene zu projiziren, die senkrecht zu einer der Axenebenen ist.

Es seien, Fig. 226, OA, OB, OC der Länge und Richtung nach die gegebenen Axen, welche auf eine zur ZAxe senkrechte Ebene Q

projizirt werden sollen. Schneidet diese Ebene die ZAxe etwa in dem Punkte E, so wird sie die XZ- und YZEbenen in zwei Linien EF und EG schneiden, so zwar, dass die Winkel CEF und CEG rechte sein werden. Zieht man nun in denselben Axenebenen durch A und B Parallele mit der ZAxe, so werden diese Linien die früheren Linien EF, EG in zwei Punkten A' und B' treffen, welche offenbar die Projektionen der Punkte A und B auf die Ebene Q vorstellen. Da ebenso E die Projektion von O ist, so geben die Linien EA und EB die gesuchte Axenprojektion. Die Längen dieser Linien können sehr leicht durch Konstruktion gefunden werden, und es handelt sich hauptsächlich um Bestimmung des Winkels $B'EA'$, welcher offenbar der Neigungswinkel der XZ- und YZEbene ist. Man erhält diesen Winkel aber mit Hilfe der Länge $A'B'$, welche sich aus dem Vierecke $ABB'A'$ ergibt. Im letzteren sind uns nämlich die Seiten AA', BB', AB und die Winkel $BB'A' = B'A'A = 90^0$ bekannt. Da die Lage des Punktes E auf der ZAxe offenbar gleichgiltig ist, so haben wir schliesslich wenn wir E und O zusammenfallen lassen, zur Lösung der gestellten Aufgabe die folgenden Konstruktionen auszuführen.

Auflösung. Die Ebene Q sei senkrecht zur ZAxe. Man mache, Fig. 227

$$BOZ = \xi,\quad ZOA = \eta,\quad AOB_1 = \zeta,\quad ZOF = 90^0$$
$$OA = a,\quad OB = OB_1 = b$$

und bestimme auf der Linie OF die Punkte A' und B', für welche

$$BB'O = OA'A = 90^0$$

Durch B ziehe man eine Parallele zu OF, deren Durchschnittspunkt mit einem um A mit dem Halbmesser AB_1 beschriebenen Kreise B_2 sein soll, so dass also

$$BB_2 \parallel OF,\quad B_2A = B_1A$$

Sucht man alsdann auf OF den Punkt B_1', für welchen

$$B_2B_1'O = 90^0$$

und konstruirt mit den Längen OA', OB', $A'B_1'$ ein Dreieck $EB_2'A_1'$, so geben die Seiten EA_1' und EB_2' der Länge und Richtung nach die gesuchte Projektion.

Wäre die Ebene Q senkrecht zu einer andern Axenrichtung, so ergibt sich das Schema der auszuführenden Operationen leicht aus dem Vorhergehenden durch geeignete Vertauschung der Buchstaben.

Da der Winkel $A_1'EB_2'$, wie schon gesagt, offenbar nichts anderes ist, als der Neigungswinkel zweier Ebenen, so vereinfacht sich die angegebene Konstruktion sehr, wenn die Grösse dieses Winkels anderswo her, etwa durch Rechnung bekannt ist.

§. 73. Projektion der Kanten zweier Flächen.

Hat man einmal eine richtige Projektion des Axensystems eines Krystalles angefertigt, so hat es keine Schwierigkeit, auch die Projektion seiner Kanten zu zeichnen. Man braucht dazu eben nur den im §. 3 angegebenen Weg einzuschlagen. Wir bemerken hier, dass es besonders für den Anfänger sehr nützlich ist, jede gezeichnete Kante auch mit den Buchstaben oder Symbolen derjenigen zwei Flächen zu versehen, deren Durchschnitt sie ist, indem man dann immer leicht erkennt, welche von den vielen Durchschnittspunkten der projizirten Kanten in der Zeichnung auch wirklich Durchschnittspunkte von Kanten im Raume sind. Im Raume können sich nämlich nur Linien schneiden, die in einer Ebene liegen; kommt daher in der Bezeichnung zweier projizirter Kanten derselbe Buchstabe oder dasselbe Symbol vor, so ist der Kreuzungspunkt dieser Linien wirklich die Projektion eines solchen Punktes im Raume.

Entsprechend bezeichnen wir einen solchen Punkt in der Zeichnung durch die Buchstaben oder Symbole der drei Flächen, durch deren Durchschnitt er entstand. Die Verbindungslinie zweier Punkte, die aber zwei Buchstaben H, K gemeinsam haben, erhält offenbar die Bezeichnung HK, d. h. sie ist die Durchschnittslinie der zwei mit H und K bezeichneten Flächen, da ja die beiden Punkte in diesen zwei Flächen liegen müssen.

Die Endpunkte der Parameter $OH = \frac{a}{h}$, $OK = \frac{b}{k}$, $OH = \frac{c}{l}$ iner Fläche $P(hkl)$ werden ersichtlich die Zeichen UWP, WUP, VP erhalten, wenn wir die Axenebenen mit U, V, W bezeichnen. Verbinden wir diese Punkte zu zweien, so erhalten wir die Linien PU, PV, PW, nämlich die Durchschnittslinie der Fläche P mit den Axenebenen.

Um nun für ein bestimmtes Axensystem in schiefer Projektion die Lage der Durchschnittslinie der zwei Flächen $P(hkl)$ und $Q(efg)$ in der Zeichnung zu finden, bestimmen wir uns zuerst die projizirten Parameter derselben, indem wir auf den Axen, falls die projizirten Längen derselben OA, OB, OC sind, Fig. 228, die Grössen

$$OH = \frac{1}{h} OA, \; OK = \frac{1}{k} OB, \; OL = \frac{1}{l} OC$$

$$OE = \frac{1}{e} OA, \; OF = \frac{1}{f} OB, \; OG = \frac{1}{g} OC$$

Die Verbindung der so bestimmten Punkte gibt uns dann die Linien

$$PU, \; PV, \; PW$$
$$QU, \; QV, \; QW$$

von denen die unter einander stehenden in einer Ebene liegen, und beziehungsweise die Durchschnittspunkte

$$PQU, \; PQV, \; PQW$$

geben. Die Verbindungslinie je zweier dieser Punkte gibt aber die Linie PQ, es müssen also diese drei Punkte in einer und derselben Geraden liegen, welches eben die gesuchte Durchschnittslinie PQ der Flächen P und Q ist.

Wir haben hiebei angenommen, dass die beiden Flächen in demselben Oktanten liegen, das Schema der Konstruktion bleibt aber ganz dasselbe, wenn diess auch nicht der Fall ist und die Parameter der zwei Flächen theils auf den positiven, theils auf den negativen Hälften der Axen oder bloss auf den letzteren liegen.

Die Konstruktion bleibt auch ganz ähnlich, wenn von den zwei Flächen jede einer anderen Axe parallel ist; nur wenn die beiden Flächen derselben Axe parallel werden, so hat man, um die Durchschnittslinie derselben zu finden, zu bedenken, dass dieselbe alsdann ebenfalls parallel der betreffenden Axe sein muss. Ist etwa $OH = OE = \infty$, so bleibt von den drei Durchschnittspunkten nur einer, nämlich PQU, Fig. 229, in endlicher Entfernung. Dieser genügt aber doch, um die Durchschnittslinie zu bestimmen, da ja dieselbe durch diesen Punkt gehen und der Axe OX parallel sein muss.

Für die Praxis empfiehlt es sich, bevor man die Durchschnittslinie zweier Flächen P und Q bestimmt, dieselben zuerst so zu verschieben, dass mit Bezug auf eine Axe die Parameter der zwei Flächen gleich werden. Hiebei ist es am zweckmässigsten, die Parameter für die YAxe gleich zu machen, indem meist in der XY- und YZEbene die Durchschnittslinien von P und Q sich unter den kleinsten Winkeln schneiden. Der Durchschnittspunkt zweier wenig geneigter Linien ist natürlich in der Zeichnung mit viel geringerer Genauigkeit anzugeben als der von mehr geneigten Linien. Sind also die Parameter der zwei Flächen etwa

OH, OK, OL
OE', OK, OF'

so werden die Punkte PQU und PQW mit K zusammenfallen, und es bleibt nur der einzige Durchschnittspunkt PQV übrig, dessen Verbindung mit K die gesuchte Durchschnittslinie PQ ist.

Das Gleichmachen zweier Parameter kann natürlich auf algebraischem Wege geschehen dadurch, dass man die Indices der einen Fläche mit einer entsprechenden Zahl multiplizirt. Es kann aber auch auf dem Wege der Zeichnung ausgeführt werden, die Durchschnittslinien einer Fläche mit den Axenebenen müssen nämlich immer sich selbst parallel bleiben, welchen Abstand jene Fläche auch vom Mittelpunkte hat. Dadurch ist es ersichtlich leicht, in Fig. 228 durch paralleles Verschieben der Linien EF, FG, GE die Punkte K und F zur Deckung zu bringen.

Für den Anfänger ist es bisweilen schwierig, die Durchschnittslinien zu bestimmen, wenn eine oder beide Flächen rückwärtige, d. h. solche Flächen sind, deren zweiter Parameter auf die negative Hälfte der YAxe zu liegen kommt. Man kann, wenn es sich bloss um die Richtung der Durchschnittslinie handelt, diess immer ersichtlich dadurch umgehen, dass man alle Parameter der betreffenden Fläche mit einer negativen Zahl multiplizirt.

Da die Durchschnittslinie zweier zu verschiedenen Axen parallelen Flächen sich meist schneller ergibt, als in dem allgemeinen Falle, so kann man sich die Richtung der Durchschnittslinie zweier Flächen P und Q oft vortheilhaft dadurch verschaffen, dass man sich die Indices zweier Flächen F und G berechnet, welche einerseits in der Zone [PQ], andererseits beziehungsweise in zwei der Zonen [100], [010], [001] liegen. Die Durchschnittslinie der Flächen F, G muss natürlich parallel sein dem Durchschnitte der mit ihnen tautozonalen Flächen P und Q.

Gehen wir nun zur Betrachtung der Horizontalprojektionen über. Wird das in Fig. 228 in schiefer Projektion ausgeführte Axensystem auf eine Ebene senkrecht zur ZAxe nach der im §. 72 gegebenen Regel projizirt, so werden uns zwei unter einem gewissen Winkel geneigte Linien OA und OB, Fig. 230, der Länge und Richtung nach die Projection der X- und YAxe vorstellen. Handelt es sich nun bloss die Richtung der Durchschnittslinie der zwei Flächen $P(hkl)$ und $Q(efg)$ in der Projektion zu finden, so gelingt diess leicht, wenn man die Flächen so verschiebt, dass sie die ZAxe in demselben Punkte schneiden, dessen Projektion offenbar sowie die ganze ZAxe mit dem Punkte O

zusammenfällt. Man mache also etwa entsprechend den Symbolen $P\left(\frac{g}{l}h, \frac{g}{l}k, g\right)$ und $Q(efg)$ auf den projizirten Axen

$$OH_1 = \frac{l}{gh}\,OA,\ OK_1 = \frac{l}{gk}\,OB$$

$$OE = \frac{1}{e}\,OA,\ OF = \frac{1}{f}\,OB$$

so ist OJ die gesuchte Durchschnittslinie der Flächen P, Q, wenn J den Kreuzungspunkt der Linien H_1K_1 und EF bedeutet. J ist ja nämlich ebenfalls ein Punkt der Durchschnittslinie PQ, da die Linien H_1K_1 und EF beziehungsweise die Durchschnitte der Axenebene XY mit den Flächen P, Q vorstellen. Man kann nun jetzt auch leicht die Projektion der Durchschnittslinie PQ in der durch die Symbole $P(hkl)$ und $Q(efg)$ gegebenen Lage bestimmen. Man suche nämlich zuerst die Durchschnittslinie OJ der beiden Flächen P, Q für den Fall, dass sie die ZAxen in demselben Punkte schneiden nach der eben besprochenen Methode. Alsdann mache man auf den projizirten Axenrichtungen

$$OH = \frac{1}{h}\,OA,\ OK = \frac{1}{k}\,OB$$

$$OE = \frac{1}{c}\,OB,\ OF = \frac{1}{f}\,OB$$

und ziehe durch den Durchschnittspunkt R der Linien HK und EF eine Parallele mit OJ, so ist diese Parallele RS nicht nur der Richtung, sondern auch der absoluten Lage nach die gesuchte Durchschnittslinie der Flächen P, Q. Diese Durchschnittslinie ist ja natürlich durch ihre Richtung und einen ihrer Punkte (R) vollkommen bestimmt.

Bedeuten S, T die Kreuzungspunkte der Linie SR mit der X- und YAxe, so sind die drei Punkte R, S, T mit Bezug auf das Vorhergehende offenbar die Projektionen der Punkte PQW, PQV, PQU. Ist der wahre Werth der Linie OS etwa s, so hat man $\frac{s}{a} = \frac{OS}{OA}$, indem ja das Verhältnis paralleler Linien in der Projektion nicht geändert wird. Der Werth des Verhältnisses $s : a$ ist aber von den Elementen des projizirten Krystalles unabhängig. Wir haben nämlich in den §. 3 und 8 gezeigt, dass, wenn die Durchschnittslinie zweier Flächen P, Q durch Linien bestimmt wird, welche parallel den Axenrichtungen sind, die Verhältnisse dieser Linien zu den betreffenden Axenlängen Grössen sind, die bloss von den Indices abhängen. Um also die Grösse $s : a$ zu konstruiren, können wir die nöthigen Elemente beliebig gross

wählen; machen wir etwa $a = OA$, so muss der früheren Gleichung zufolge $s = OS$ sein, und die Konstruktion für s gibt uns sogleich die Länge OS. Da die Länge OT auf gleiche Weise gefunden wird, so kann man die Lage der Durchschnittslinie der beiden Flächen $P(hkl)$, $Q(efg)$ in der Horizontalprojektion auch auf folgende, meist bequemere Weise finden:

Man mache auf den projizirten Axenrichtungen und auf der beliebigen Linie OZ, Fig. 231,

$$OH = \frac{1}{h}\, OA, \quad OK = \frac{1}{k}\, OB, \quad OL = \frac{\lambda}{l}$$

$$OE = \frac{1}{e}\, OA, \quad OF = \frac{1}{f}\, OB, \quad OG = \frac{\lambda}{g}$$

wo λ eine beliebige Länge bedeutet. Sind dann R, S', T' die Kreuzungspunkte der Linien HK mit EF, HL mit EG, KL mit FG, so ziehe man durch S' und T' Parallele mit OZ, welche die X- und YAxe beziehungsweise in den Punkten S und T schneiden; die Linie RST ist dann die gesuchte Durchschnittslinie PQ. Da die Punkte R, S, T in einer Geraden liegen müssen, so genügen eigentlich schon zwei derselben zur Bestimmung der Durchschnittslinie.

Ganz ähnliche Sätze finden wir natürlich auch für die zur X- oder YAxe senkreckten Vertikalprojektionen, daher es auch nicht nöthig ist, näher darauf einzugehen.

§. 74. Tesserales System.

Schiefe Projektion des Axensystems. Nach den Betrachtungen des §. 71 reduzirt sich diess Problem für ein bestimmtes r und s auf die folgende Konstruktion.

Konstruktion, Fig. 232. Man wähle auf einer horizontalen Linie zu verschiedenen Seiten des Punktes O derselben zwei Punkte E und F, für welche

$$OE = rOF$$

und bestimme dann unterhalb der Linie EF die Punkte G, B, A, oberhalb derselben aber den Punkt C so, dass

$$\left.\begin{matrix} GE \\ BF \\ AE \\ OC \end{matrix}\right\} \perp EF, \qquad \begin{aligned} GE &= OF \\ BF &= \frac{1}{s}\, OE \\ AE &= \frac{1}{s}\, GE \\ OC &= OG' = \frac{1}{s}\, OG . \sqrt{s^2-1} = OG \text{ (approx.)} \end{aligned}$$

Die Lage des Punktes G' wird mit Hilfe des Halbirungspunktes M der Linie OG und mittelst zweier Kreisbögen so bestimmt, dass

$$OM = MG = \frac{1}{2} OG$$

$$G'M = GM, \; G'G = \frac{1}{8} OG$$

wird; gewöhnlich ist es jedoch genau genug, statt OG' bloss die Länge OG zu wählen.

Trägt man noch, nachdem man die Punkte A, B, C mit O verbunden hat, auf den Verlängerungen dieser Linien die Längen

$$OA' = OA, \; OB' = OB, \; OC' = OC$$

auf, so geben die Linien AA', BB', CC' die vollständige Projektion eines tesseralen Axensystems. Die absolute Länge der drei projizirten Axenlängen ist hiebei offenbar gleich OG.

Verbindet man die Endpunkte der Axen miteinander, so erhält man hiedurch die Umrisse der Flächen (111), ($\bar{1}$11)..., welche zusammen das Oktaeder bilden. Die Kanten dieser Form geben die Richtungen der rhombischen Hauptaxen; dieselben stehen nämlich senkrecht auf den dodekaedrischen Hauptschnitten, da sie, wie man sich leicht überzeugt, die Axen der Zonen [110], [1$\bar{1}$0]... sind. Um die Richtungen der trigonalen Axen zu finden, welche auf den Flächen des Oktaeders senkrecht stehen, braucht man nur die Halbirungspunkte der Kanten des Oktaeders mit den nächsten Ecken zu verbinden. Man erhält so in jeder Oktaederfläche drei Linien, welche sich in einem und demselben Punkte schneiden, der offenbar der Fusspunkt der aus dem Mittelpunkte auf diese Fläche gefällten Senkrechten und also der Durchschnittspunkt einer trigonalen Axe ist. Die tetragonalen Hauptaxen sind schon durch die Axenrichtungen gegeben.

Es ist klar, dass für den Fall des Gleichgewichtes die Verbindungslinie zweier Ecken E und E' einer tesseralen Form oder Kombination, welche isoschematisch mit Bezug auf einen der Hauptschnitte sind, parallel sein muss entweder einer tetragonalen oder einer rhombischen Hauptaxe, je nachdem jener Hauptschnitt ein hexaedrischer oder ein dodekaedrischer ist. Es wäre auch nicht schwer, in Betreff solcher zwei Ecken das Problem zu lösen, wie man aus der Lage des einen Eckes in der Zeichnung die Lage des anderen finden könne. Gewöhnlich wird man sich jedoch beide durch die Konstruktion ihrer Kanten verzeichnen, nachträglich aber sich behufs der Genauigkeit der

Zeichnung überzeugen, dass wirklich die Verbindungslinie der zwei Ecken parallel der entsprechenden Hauptaxe ist.

Ebenso wird im Falle des Gleichgewichtes die Verbindungslinie zweier gerade entgegengesetzter Ecken durch den Mittelpunkt O gehen müssen; dieselbe wird aber parallel einer trigonalen, tetragonalen oder rhombischen Hauptaxe sein, wenn die betreffenden Ecken trigonale, tetragonale oder rhombische sind.

Wir wollen hier noch den kürzesten Weg angeben, auf dem man sich eine Zeichnung der verschiedenen Formen dieses Systems für den Fall ihres Gleichgewichtes anfertigen kann; diese Methode lauft ersichtlich darauf hinaus, von den verschiedenen Durchschnittslinien der Flächen einer Form nur diejenigen wirklich zu zeichnen, die zur Bestimmung der Kanten unumgänglich nothwendig sind.

Das Hexakisoktaeder $\{hkl\}$, Fig. 233. Man bestimme auf der positiven und negativen Hälfte jeder Halbaxe die Punkte H, K, L dadurch, dass man die projizirte Länge der entsprechenden Axe vom Mittelpunkte O aus nacheinander

$$\frac{1}{h}, \ \frac{1}{k}, \ \frac{1}{l} \text{ mal}$$

aufträgt. Da wir in diesem Systeme immer $h > k > l$ voraussetzen, so wird offenbar $OH < OK < OL$ sein. Man verbinde nun wechselweise die Punkte H und K der verschiedenen Axen; diese Verbindungslinien werden in jeder Axenebene ein Achteck bilden, welches der Durchschnitt des Hexakisoktaeders mit eben diesem Hauptschnitte ist. Die Seiten der Achtecke werden daher den Kanten D, die Ecken aber theils den tetragonalen, theils den rhombischen entsprechen. Verbinden wir die letzteren (R) noch mit den Punkten L jener Axe, die auf der betreffenden Axenebene senkrecht steht, so erhalten wir in jedem Oktanten drei Linien (F), deren gemeinsamer Durchschnittspunkt dem betreffenden trigonalen Ecke entspricht. Wir brauchen jetzt nur noch die zuletzt bestimmten Ecken mit den tetragonalen durch Linien (G) zu verbinden, um sämmtliche Kanten des Hexakisoktaeders projizirt und somit eine Zeichnung dieser Form angefertigt zu haben.

Für die Zeichnung des Ikositetraeders $\{hkk\}$ ist die Konstruktion eine ganz ähnliche, nur dass die Punkte K und L zusammenfallen und die trigonalen Ecken nicht mehr mit den tetragonalen zu verbinden sind.

Bei dem Triakisoktaeder $\{hhl\}$ fallen die Punkte H und K jeder Halbaxe zusammen; man hat dann die Verbindungslinien der Punkte H zu halbiren, um so die Punkte (R) zu erhalten, deren Ver-

bindungslinien mit den Punkten L die trigonalen Ecken bestimmen. Letztere Linien sind natürlich in diesem Falle keine Kanten.

Um das Tetrakishexaeder $\{hk0\}$ zu zeichnen, hat man wieder durch Verbindung der Punkte H und K sich die Achtecke zu zeichnen, in welchen diese Form die Axenebenen schneidet; die Seiten dieser Achtecke sind jedoch keine Kanten. Legt man nun durch die Ecken (R) dieser Durchschnitte Parallele (F) zu den entsprechenden Axen, so bestimmen die Kreuzungspunkte der Kanten die trigonalen Ecken, welche noch mit den tetragonalen Ecken (H) zu verbinden sind.

Die Zeichnung des Dodekaeders $\{110\}$ unterscheidet sich von der vorhergehenden Form nur dadurch, dass die Punkte H und K zusammenfallen und also die Punkte R die Halbirungspunkte der Linien sind, welche die Punkte H gegenseitig verbinden. Legt man durch die Punkte R wieder Parallele zu den Axen, so erhält man wieder durch die Durchschnittspunkte derselben die trigonalen Ecken, welche mit den Punkten H verbunden die Kanten dieser Form geben.

Für das Oktaeder $\{111\}$ fallen alle drei Punkte H, K, L jeder Halbaxe zusammen, und die Verbindungslinien der Punkte H gibt uns die Kanten dieser Form.

Die Zeichnung des Hexaeders $\{100\}$ unterscheidet sich von der des Tetrakishexaeders dadurch, dass die Verbindungslinien der Punkte H und K parallel den Axen werden, der Punkt K liegt ja in diesem Falle in der Unendlichkeit. Auch geben die durch die Punkte R zu den Axen gezogenen Parallelen sämmtliche Kanten dieser Form.

Das Hexakistetraeder $\varkappa\{hkl\}$, Fig. 234. Die Zeichnung dieser Form gelingt leicht mit Hilfe der Zeichnung des entsprechenden Hexakisoktaeders $\{hkl\}$. Beide Formen haben ja die rhombischen und vier trigonale Ecken gemein. Verlängert man nun die Kanten F der letzteren Ecken, so geben deren Durchschnittspunkte offenbar die übrigen 4 trigonalen Ecken des Hexakistetraeders, wodurch diese Form gegeben ist.

Ebenso erhält man das Trigondodekaeder $\varkappa\{hkk\}$ aus dem Ikositetraeder $\{hkk\}$ durch Verlängerung der Kanten F von vier abwechselnden Oktanten. Von den zu den Axenebenen parallelen Kanten E dieser Gestalt ist jede die Richtung einer anderen rhombischen Hauptaxe.

Das Triakistetraeder $\varkappa(hhl)$ erhält man auf ähnliche Art aus dem Triakisoktaeder $\{hhl\}$, indem man die zur Konstruktion der letzteren Form dienenden Linien F abwechselnder Oktanten bis zu ihrem Durchschnitte verlängert, wodurch man die 4 trigonalen Ecken

erhält, welche mit den rhombischen und 4 trigonalen Ecken des Ikositetraeders das Triakistetraeder vollkommen bestimmen.

Das Tetraeder $\{111\}$ erhält man einfach dadurch, dass man durch den Endpunkt jeder Axe zu einer der zwei auf dieser Axe senkrechten rhombischen Hauptaxen eine Parallele zieht, so dass schliesslich von den 6 Kanten des Tetraeders jede einer anderen rhombischen Hauptaxe parallel ist.

Das Dyakisdodekaeder $\pi\{hkl\}$, Fig. 235, stimmt mit dem Hexakisoktaeder $\{hkl\}$ in der Lage seiner trigonalen und tetragonalen Ecken überein, sowie auch die Kanten D der ersteren Form mit abwechselnden Kanten D des Hexakisoktaeders zusammenfallen. Die Lage der Kanten M findet man aber, indem man die Punkte H jeder Halbaxe mit den Punkten L der entsprechenden Axenrichtung verbindet. Die Durchschnittspunkte der Kanten D und M geben die monoklinischen Ecken, welche mit den trigonalen Ecken durch Linien N verbunden schliesslich die gesuchte Projektion geben.

Für das Pentagondodekaeder $\pi\{hk0\}$ hat man durch die Punkte H des Tetrakishexaeders $\{hk0\}$ Parallele zu den entsprechenden Axenrichtungen zu legen und die Durchschnittspunkte dieser Kanten (D) mit den Linien HK zu suchen, mit welchen sie in einer Ebene liegen. Diese Durchschnittspunkte geben die monoklinischen Ecken dieser Form, und die Verbindungslinien der letzteren mit den trigonalen Ecken des Tetrakishexaeders die noch fehlenden Kanten N.

In der Horizontalprojektion wird die ZAxe natürlich nur ein Punkt O erscheinen, in welchem die X- und YAxe aufeinander senkrecht stehen. Die projizirten Längen der letzteren sind gleich und überhaupt ebenso gross als die wirklichen Axenlängen.

Als Beispiel wollen wir noch die Projektion des Hexakisoktaeders $\{hkl\}$ zeichnen, im Falle letztere Form sich im Gleichgewichte befindet. Man zeichne zwei zu einander senkrechte Linien XX', YY', Fig. 236, und trage von ihrem Durchschnittspunkte O aus auf jeder Hälfte mit der beliebigen Längeneinheit OE die Stücke

$$OH = \frac{OE}{h}, \quad OK = \frac{OE}{k}, \quad OL = \frac{OE}{l}$$

Die wechselseitige Verbindung der Punkte H und K gibt dann den achtseitigen Schnitt des Hexakisoktaeders mit der XYEbene. Verbinden wir die 4 Ecken R dieses Achteckes untereinander, so werden diese vier Verbindungslinien die Axenrichtungen in vier Punkte R' schneiden, welche mit dem Punkte R zusammen den rhombischen Ecken entsprechen. Verbindet man nun noch die Punkte R mit O, die

Punkte R' aber mit den Punkten L, so erhält man durch die Durchschnitte dieser Linien schliesslich die trigonalen Ecken, welche nun noch mit den Punkten H zu verbinden sind.

Die Fig. 236 kann übrigens auch eine zur X- oder YAxe senkrechte Vertikalprojektion des Hexakisoktaeders vorstellen; diese Projektionen unterscheiden sich im tesseralen Systeme überhaupt nicht von den Horizontalprojektionen.

§. 75. Tetragonales System.

Schiefe Projektion der Axen. Da die Axenrichtungen dieses Systems auf einander senkrecht stehen, so brauchen wir nur in der Projektion eines tesseralen Axensystems die Längen richtig zu bestimmen, um sogleich eine richtige Projektion tetragonaler Axen zu erhalten. Verhalten sich die letzteren Axen in Wirklichkeit wie $a:a:c$ und sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ die projizirten Längen der tesseralen Axen, die also in der Wirklichkeit alle gleich lang sind, so braucht man auf den projizirten Axenrichtungen der Reihe nach nur die Stücke

$$OA = a \,.\, \mathfrak{a},\quad OB = a \,.\, \mathfrak{b},\quad OC = c \,.\, \mathfrak{c}$$

aufzutragen, um auch die projizirten Längen der tetragonalen Axen zu finden, da ja die wahren Längen dieser Linien sich wie $a : a : c$ verhalten müssen. Wir haben also folgende Konstruktion auszuführen.

Konstruktion. Sind OX, OY, OZ die Projektionen tesseraler Axen, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ aber ihre projizirten Längen, so mache man auf beiden Seiten dieser Richtungen entsprechend

$$OA = OA' = a \,.\, \mathfrak{a},\quad OB = OB' = a \,.\, \mathfrak{b},\quad OC = OC' = c \,.\, \mathfrak{c}$$

Die Linien AA', BB', CC' geben dann der Länge und Richtung nach die Projektion der positiven und negativen Halbaxen eines tetragonalen Axensystems, dessen Elemente $a : a : c$ sind.

Die ZAxe entspricht in diesem Falle der morphologischen Axe, die X- und YAxen aber den primären Seitenaxen. Halbirt man die Linien AB und $A'B$ und verbindet die so erhaltenen Punkte mit dem Mittelpunkte O, so geben diese zwei Linien die sekundären Seitenaxen.

Für den Fall des Gleichgewichtes werden ersichtlich für die Verbindungslinien zweier Ecken einer Form oder Kombination dieselben Sätze gelten, die wir schon beim tesseralen Systeme angegeben haben.

Die Zeichnung der Dipyramide $\{hkl\}$, Fig. 237, für den Fall dass ihre Flächen im Gleichgewichte sind, geschieht offenbar dadurch dass man auf jeder Hälfte der X- und YAxe die betreffende projizirte

Axenlänge $\frac{1}{h}$ und $\frac{1}{k}$mal aufträgt, wodurch man die Punkte *H* und *K* erhält; auf der *Z*Axe jedoch die Punkte *L* dadurch bestimmt, dass man die projizirte Länge dieser Axe $\frac{1}{l}$mal nimmt. Verbindet man nun wechselweise die Punkte *H* und *K*, so geben dieselben ein Achteck, welches den Durchschnitt der Dipyramide mit der *XY*Ebene vorstellt. Man hat dann nur noch die Ecken dieses Umrisses mit den zwei Punkten *L* zu verbinden, um sämmtliche Kanten der Dipyramide zu erhalten.

Die Projektion des Trapezoeders $\varkappa\{hkl\}$, Fig. 238, lässt sich mit Hilfe der Zeichnung der entsprechenden Dipyramide $\{hkl\}$ folgendermassen ausführen. Um z. B. das Eck zu bestimmen, das von den Flächen hkl, $\bar{k}hl$ und $kh\bar{l}$ gebildet wird, verlängere man die Basiskanten der zwei ersten Flächen bis zu ihrem gegenseitigen Durchschnittspunkte *p*; die Verbindungslinie dieses Punktes mit dem Mittelpunkte *O* wird aber die Basiskante der letzten Fläche $(kh\bar{l})$ in einem Punkte *q* schneiden. Verbindet man nun *p* mit der oberen Spitze der Pyramide, *q* mit der unteren, so gibt der Durchschnittspunkt dieser zwei Linien das gesuchte Eck. Ebenso bestimmt man sich die anderen Ecken *R*, welche unter einander und mit den Spitzen der Pyramide verbunden die Zeichnung des Trapezoeders geben.

Das Protodisphenoid $\chi\{hkl\}$, Fig. 239, ergibt sich ebenfalls leicht aus der Zeichnung der Dipyramide $\{hkl\}$. Die monoklinischen Ecken dieser Form sind nämlich die Durchschnittspunkte je einer oberen und einer unteren Polkante. Die Lage dieser Kanten ist aber leicht zu bestimmen. Die Hälfte fällt nämlich schon mit Kanten der Dipyramide zusammen und die übrigen ergeben sich leicht, wenn man in der Dipyramide die Basiskanten der zwei Flächen, deren Polkante gesucht wird, bis zu ihrem Durchschnittspunkte verlängert, und diesen Punkt (*s*) mit der entsprechenden Spitze der Dipyramide verbindet.

Dieselbe Methode lässt sich natürlich auch auf die Deuterodisphenoide anwenden.

Die Tritopyramide $\pi\{hkl\}$, findet man leicht aus der Projection der Dipyramide, indem man die entsprechenden abwechselnden Basiskanten bis zu deren gegenseitigem Durchschnitte verlängert und die so erhaltenen Punkte mit beiden Spitzen der Dipyramide verbindet.

Die Horizontalprojektion eines tetragonalen Axensystems sind offenbar zwei zu einander senkrechte und gleich lange Linien; die zu der *X*- und *Y*Axe senkrechten Vertikalprojektionen eben-

falls zwei Linien, die auf einander senkrecht stehen, deren Längen aber sich wie $a : c$ verhalten.

§. 76. Rhombisches System.

Schiefe Projektion der Axen. Da auch hier die Axenrichtungen auf einander senkrecht stehen, so können wir zu deren Projektion unmittelbar eine Zeichnung tesseraler Axen verwenden, wenn wir nur deren Längen richtig bestimmen. Diess macht folgende Operationen nöthig.

Konstruktion. Man mache auf beiden Seiten der projizirten tesseralen Axen OX, OY, OZ mit den projizirten Längen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ derselben der Reihe nach

$$OA = OA' = a.\mathfrak{a},\quad OB = OB' = b.\mathfrak{b},\quad OC = OC' = c.\mathfrak{c}$$

Die Linien AA', BB', CC' geben alsdann der Länge und Richtung nach die Zeichnung eines rhombischen Axensystems, dessen Längen sich in der Wirklichkeit wie $a : b : c$ verhalten.

Die drei Axenrichtungen entsprechen in diesem Falle rhombischen Hauptaxen. Einer von ihnen parallel wird die Verbindungslinie zweier Ecken einer im Gleichgewichte befindlichen rhombischen Form oder Kombination sein müssen, falls jene zwei Ecken isoschematisch mit Bezug auf einen der Hauptschnitte, d. i. der Axenebenen sind. Die Verbindungslinie gerade entgegengesetzter Ecken wird in dem Falle des Gleichgewichtes natürlich auch in diesem Systeme durch den Axenmittelpunkt O gehen müssen. Die Zeichnung der rhombischen Formen bietet keine weiteren Schwierigkeiten dar.

Die Horizontal- und die zur X- und YAxe senkrechten Verticalprojektionen bestehen ersichtlich aus zwei zu einander senkrechten Linien, deren Längen beziehungsweise a, b oder b, c oder a, c sind.

§. 77. Monoklinisches System.

Schiefe Projektion des Axensystems, Fig. 240. Im monoklinischen Systeme steht nur die YAxe senkrecht zu den beiden anderen Axen; von letzteren, welche also zwei ungleiche Winkel bilden, nehmen wir an, dass ihre positiven Halbaxen den stumpfen dieser zwei Winkel einschliessen, so dass $\eta > 90^0$. Um nun ein solches Axensystem, dessen Längen sich wie die Zahlen a, b, c verhalten, mit Hilfe der Projektion eines tesseralen Axensystems zu zeichnen, können wir sogleich die $\mathfrak{Y}$- und $\mathfrak{Z}$Axe des letzteren zur Y- und ZAxe des monoklinischen Axensystems machen. Tragen wir dann auf denselben

$OB = b\mathfrak{b}$, $OC = c\mathfrak{c}$ auf, unter $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ wieder die projizirten Längen der tesseralen Axen verstanden, so werden die Linien OB und OC ihrer Länge und Richtung nach die Projektionen der Y- und ZAxe sein. Ist auf der XAxe $OA = a$, und zieht man durch A eine Parallele mit OZ, welche die XAxe im Punkte E schneidet, so ist $OE = m.\mathfrak{a}$ und $EA = n.\mathfrak{c}$ und die Lage des Punktes A gegeben, sobald man die Werthe von m und n kennt. Die letzteren Grössen bedeuten aber offenbar nur das Verhältnis der wahren Längen von OE und EA zu einer beliebigen Längeneinheit, wenn das Verhältnis der wahren Länge von OA zu dieser Einheit gleich a ist. Diese Verhältnisse nun können leicht durch geometrische Konstruktion ermittelt werden, wodurch wir die folgende Auflösung der gestellten Aufgabe erhalten.

Konstruktion. Sind $a : b : c$ und $\eta > 90^0$ die gegebenen Elemente des zu konstruirenden monoklinischen Axensystems, so mache man die Winkel, Fig. 241

$$PO'Q = \eta \quad PO'R = 90^0$$

und trage mit der beliebigen Länge $O'N$ auf der Linie $O'Q$ die Länge

$$O'A' = a.O'N$$

auf; ferner aber auch noch die projizirten Längen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ des tesseralen Axensystems, so dass

$$O'\mathfrak{A} = \mathfrak{a} \quad O'\mathfrak{C} = \mathfrak{c}$$

ist. Sind nun E' und F' die Durchschnittspunkte der Linien $O'P$ und $O'R$ mit der von A' aus auf sie gefällten Senkrechten, also

$$O'E'A' = O'F'A' = 90^0$$

und bestimmt man sich auf diesen Linien auch noch die Punkte E'' und F'', so dass

$$\mathfrak{A}E'' \parallel NE', \quad \mathfrak{C}F'' \parallel NF'$$

wird, so ist offenbar

$$O'E'' = \frac{O'E'}{O'N}\,\mathfrak{a}, \quad O'F'' = \frac{O'F'}{O'N}\,\mathfrak{c}$$

Macht man also auf den drei Axen des projizirten tesseralen Axensystems, Fig. 240

$$OE = O'E'', \quad OB = b.\mathfrak{b}, \quad O'C = c.\mathfrak{c}, \quad OF = O'F''$$

und zieht durch die Punkte E und F Parallele mit der Z- und XAxe, deren Durchschnittspunkt A ist, so geben die Linien OA, OB, OC der Grösse und Richtung nach die Projektion des gegebenen monoklinischen Axensystems.

Anmerkung. Will man den Weg der Rechnung einschlagen, so hat man offenbar zur Bestimmung der Längen OE und OF die Gleichungen

$$OE = a \cos(\eta - 90^0) . a, \quad OF = a \sin(\eta - 90^0) . c.$$

Es ist leicht anzugeben, in welchen Punkten die tesseralen Axen, welche zur Zeichnung des Axensystems eines monoklinischen Krystalles dienten, von irgend einer Fläche des letzteren geschnitten werden. Sind, Fig. 240, H, K, L die Punkte, in welchen die Fläche F die monoklinischen Axen schneidet, welche Punkte ja immer mit Hilfe der Indices gefunden werden können, so sind die entsprechenden Punkte für die tesseralen Axen offenbar H', K, L, wo H' der Durchschnittspunkt der Linie HL mit der XAxe des tesseralen Axensystems ist. Mit Hilfe dieser Bemerkung ist es ersichtlich möglich, jedes Problem, welches bei der Zeichnung monoklinischer Krystalle vorkommen könnte, mit Hilfe der für rechtwinklige Axen gegebenen Lösung auszuführen; indem wir jede Fläche auf das tesserale Axensystem beziehen.

So können wir auch, um den Punkt E zu finden, in welchem die Fläche HKL von der aus O auf sie gefällten Normale getroffen wird, statt die allgemeine Konstruktion auszuführen, auch die im §. 70 für bloss rechtwinklige Axen gegebene Konstruktion benützen, indem wir untersuchen, in welchem Punkte die Fläche $H'KL$ von ihrer Normale getroffen wird. Diess Problem kommt natürlich bei der Zeichnung der Zwillingskrystalle in Betracht.

Die Horizontalprojektion eines monoklinischen Axensystems wird offenbar aus zwei zu einander senkrechten Linien von den Längen b und OE', der Y- und ZAxe entsprechend bestehen. In der zur YAxe senkrechten Vertikalprojektion haben wir dagegen als X- und ZAxe die Längen a und b unter dem Winkel η zu einander geneigt.

§. 78. Triklinisches System.

Schiefe Projektion des Axensystems, Fig. 242. Um ein triklinisches Axensystem mit Hilfe der Projektion eines tesseralen zu zeichnen, lassen wir die ZAxe des ersteren mit der $\mathfrak{Z}$Axe des letzteren, und die XZEbene ebenso mit der $\mathfrak{X}\mathfrak{Z}$Ebene der tesseralen Axen zusammenfallen. Die Projektion der auf die ZAxe bezüglichen Axenlänge erhält man dann unmittelbar, indem man $OC = c.$ macht; die Projektion der XAxe zu finden wird man ersichtlich auf die nämliche Weise wie bei der Projektion des monoklinischen Axensystems zu operiren haben. Es handelt sich nur mehr um die YAxe. Denken wir uns durch den Endpunkt B dieser Axe eine Linie parallel

der $\mathfrak{Z}$Axe gezogen, welche die $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$Ebene etwa in dem Punkte R trifft, von R aus aber eine Senkrechte auf die $\mathfrak{X}$Axe gefällt, welche dieselbe in dem Punkte P kreuzt, so wird $OP = p.\mathfrak{a}$, $PR = q.\mathfrak{b}$, $BR = r.\mathfrak{c}$ sein und die Lage des Punktes B ist in der Projektion durch die Grössen p, q, r bestimmt. Diese Grössen kann man aber wieder leicht durch geometrische Konstruktion finden, sobald man nur den Winkel $RO\mathfrak{X}$ kennt; diesen Winkel findet man aber nach der schon im §. 72 bei Gelegenheit der Horizontalprojektion benützten Methode.

Konstruktion. Die Axenwinkel ξ, η, ζ des zu projizirenden triklinischen Axensystems seien sämmtlich grösser als 90°. Man mache Fig. 248

$$Y'O'Z' = \xi \quad Z'O'X' = \eta \quad X'O'Y_1' = \zeta \quad Z'O'D = 90^0$$

und auf den Linien $O'Y'$, $O'Y_1'$, $O'X'$ mit der beliebigen Längeneinheit λ

$$O'B' = O'B_1 = b.\lambda, \quad O'A' = a.\lambda$$

Man suche auf $O'D$ die Punkte E' und R', für welche

$$O'Z' \parallel A'E' \parallel B'R'$$

und mittelst einer Parallelen und eines Kreises den Punkt B'', so dass

$$B'B'' \parallel O'D, \quad B''A' = B_1A',$$

auf der Linie $O'D$ aber den Punkt R'', für welchen

$$B''R'' \parallel B'R'$$

Mittelst zweier Kreisbögen findet man dann den Punkt R''', wofür

$$R'''O' = R'O' \quad R'''E' = R''E'$$

ist. Der Winkel $R'''O'E'$ gibt alsdann den gesuchten Winkel $RO\mathfrak{X}$. Wir bestimmen aber auf $O'D$ noch den Punkt P', so dass

$$R'''P' \parallel O'Z'$$

Man trage nun auf dem einen Schenkel eines beliebigen Winkels die Längen, Fig. 244,

$$O''N = \lambda, \quad O''\mathfrak{A} = \mathfrak{a}, \quad O''\mathfrak{C} = \mathfrak{c},$$

auf dem anderen aber die Linien

$$O''E'' = O'E', \quad O''F = A'E'$$

auf und suche auf dem letzteren Schenkel die Punkte E_1 und F_1, so dass

$$NE'' \parallel \mathfrak{A}E_1 \quad NF'' \parallel \mathfrak{C}F_1$$

ist. Auf ähnliche Weise trage man auf den einen Schenkel eines anderen Winkels, Fig. 245, die Längen

$$O'''N' = 1, \quad O'''\mathfrak{A}' = \mathfrak{a}, \quad O'''\mathfrak{B}' = \mathfrak{b}, \quad O'''\mathfrak{C}' = \mathfrak{c},$$

auf den anderen aber

$$O'''U = O'''P', \quad O'''V = P'R''', \quad O'''W = B'R'$$

auf und bestimme auf dem letzteren Schenkel die Punkte U_1, V_1, W_1 für welche

$$N'U \parallel \mathfrak{A}'U_1, \quad N'V \parallel \mathfrak{B}'V_1, \quad N'W \parallel \mathfrak{C}'W_1$$

ist. Macht man nun in Fig. 242

$$OE = O''E_1; \quad EA \parallel O\mathfrak{Z}; \quad -EA = O''F_1;$$
$$-OP = O'''U_1; \quad PR \parallel O\mathfrak{Y}; \quad PR = O'''V_1;$$
$$BR \parallel O\mathfrak{Z}; \quad -BR = O'''W_1; \quad OC = c.\mathfrak{c}$$

so geben schliesslich die Verbindungslinien der so bestimmten Punkte A, B, C mit dem Punkte O der Länge und Richtung nach die gesuchte Projektion des gegebenen triklinischen Axensystems.

Anmerkung. Auf dem Wege der Rechnung findet man

$OE = a \sin \eta . \mathfrak{a}, \quad AE = a \cos \eta . \mathfrak{c}$

$OP = -b \sin \xi \cos \psi . \mathfrak{a}, \quad PR = b \sin \xi \sin \psi . \mathfrak{b}, \quad BR = b \cos \xi . \mathfrak{c}$

wobei ψ gleich dem Winkel $R'''O'R'$ ist und sich aus folgenden Gleichungen ergibt;

$$s = \frac{\xi + \eta + \zeta}{2}, \quad \cos \frac{\psi}{2} = \sqrt{\frac{\sin (s - \zeta) \sin (s - \eta)}{\sin s \sin (s - \xi)}}$$

Diese Gleichungen lassen sich nämlich mittelst ebener Trigonometrie aus der angegebenen Konstruktion ableiten.

Da der Winkel $R'O''R''' = 180^0 - R'''O'E'$ offenbar der Normalenwinkel der Axenebenen XZ und YZ ist, so zeigt die vorhergehende Konstruktion auch, wie man auf geometrischem Wege mit Hilfe der drei Kantenwinkel dreier Flächen zur Kenntnis der Normalenwinkel derselben gelangt. Dieselben Operationen werden aber auch auszuführen sein, will man auf dem Wege der Konstruktion umgekehrt aus dem Normalenwinkel dreier Flächen die Kantenwinkel derselben bestimmen; wir haben ja nämlich schon im §. 5 gezeigt, dass jede Relation zwischen den Kanten- und Normalenwinkeln dreier Ebenen auch noch richtig bleibt, wenn man in dieselbe statt der Kanten- und Normalenwinkel die entsprechenden Normalen- und Kantenwinkel hineinsetzt.

Auch in diesem Systeme ist es wieder leicht, für eine Fläche welche die triklinischen Axen in den Punkten H, K, L schneidet, anzugeben, in welchen Punkten diese Fläche die tesseralen Axen trifft Zieht man nämlich in Fig. 242 die Linien HL, KL, OR, so liegen

offenbar die zwei letzteren in einer Ebene, und geben daher einen wirklichen Durchschnittspunkt *G*. Schneidet die Linie *HL* die 𝔛Axe im Punkte *H'*, die Linie *H'G* aber die 𝔜Axe im Punkte *K'*, so sind offenbar *H'*, *K'*, *L* die Punkte, in welchen die Fläche *HKL* das tesserale Axensystem, welches zur Projektion des triklinischen gedient hat, trifft. Wir können also auch statt triklinischer Axen der Zeichnung immer rechtwinklige zu Grunde legen.

Ueber das Verfahren, das man behufs Anfertigung einer Horizontalprojektion eines triklinischen Axensystems einzuschlagen hat, ist schon im §. 72 das Nöthige gesagt; dort ist ja der allgemeine Fall behandelt.

§. 79. Hexagonales System.

Schiefe Projektion der Axen, Fig. 246. Wir betrachten die Krystalle dieses Systems immer so, dass ihre morphologische Axe aufrecht ist; bei der Zeichnung eines hexagonalen Axensystems mit der Projektion tesseraler Axen werden wir daher die 𝔷Axe der letzteren zur Normale der Fläche (111) machen müssen; lassen wir dann noch die ZAxe des hexagonalen Systems in die 𝔜𝔷Ebene des zweiten Axensystems fallen, so ist die Lage der beiderlei Axen vollkommen gegen einander bestimmt. Sind *A*, *B*, *C* die Endpunkte der projizirten hexagonalen Axen, so werden wir den Punkt *T*, in welchem die 𝔷Axe die Fläche *ABC*, d. h. (111) trifft, leicht dadurch finden, dass wir die Seiten des gleichseitigen Dreieckes (*ABC*) halbiren und diese Punkte mit den gegenüberliegenden Ecken verbinden. Verlängert man die Linie *TC*, bis sie die Seite *AB* im Punkte *S* trifft, so muss $ST = \frac{1}{2} TC$ sein. Es ist nämlich $TC = AT = 2ST$, da in dem Dreiecke *ATS* in Wirklichkeit der Winkel $TSA = 90^0$, $STA = 60^0$ ist. Die Linie *TC* wird aber offenbar der 𝔜Axe parallel sein müssen, da ja die Fläche *ABC* senkrecht zu *O*𝔷 und daher auch parallel zur Ebene 𝔛𝔜 sein muss, andererseits aber unserer Annahme zufolge *OZ* in der Ebene 𝔜𝔷 liegen soll. Die Seite *AB* wird ferner ersichtlich parallel der 𝔛Axe sein, da sie senkrecht zu *SC* ist. Ziehen wir durch *T* eine Parallele zu *AB*, so wird dieselbe die Seiten *AC* und *BC* in zwei Punkten *M* und *N* schneiden, für welche offenbar $MT = NT$ ist. Nach diesem ist es klar, dass uns die Lage der hexagonalen Axen gegeben sein wird, sobald wir nur die projizirten Längen von *OT*, *TM* und *TC* kennen. Wir haben also zuerst die absoluten Längen dieser Linien zu suchen und dieselben mit der Längeneinheit abzumessen. Mit den so erhaltenen Zahlen *m*, *n*, *p* haben wir dann noch beziehungsweise die projizirten

Längen c, a, b des tesseralen Axensystems zu multipliziren, um die Längen der gesuchten Linien zu erhalten. Ist die Längeneinheit willkürlich, so können wir $m = 1$ setzen, alsdann werden die projizirten Längen der Linien OT, TM, TC beziehungsweise c, $\frac{MT}{OT}$ a, $\frac{TC}{OT}$ b, und können durch folgende Konstruktion gefunden werden.

Konstruktion. Der Axenwinkel der hexagonalen Axen sei ξ, dieselben sollen mit Hilfe der Projektion tesseraler Axen gezeichnet werden, deren projizirte Richtungen $O\mathfrak{X}$, $O\mathfrak{Y}$, $O\mathfrak{Z}$, deren projizirte Längen aber a, b, c sind.

Man mache mit einer beliebigen Länge $A'O'$, Fig. 247

$$A'O'B' = \xi \quad A'O' = O'B'$$
$$B'C' = C'A' = A'B'$$

durch den Punkt T', welcher der Durchschnittspunkt der drei Höhen des Dreieckes $A'B'C'$ ist, ziehe man

$$T'O'' \parallel A'B'$$

welche die Linie $A'C'$ im Punkte M' trifft und für deren Punkt O''

$$C'O'' = O'A'$$

ist. Man zeichne sich nun einen beliebigen Winkel, Fig. 248, und trage auf dem einen Schenkel desselben die Längen

$$T''O''' = T'O'', \quad T''C'' = T'C', \quad T''M'' = T'M'$$

auf, auf dem anderen aber die Linien

$$T''\mathfrak{A} = \mathfrak{a} \quad T''\mathfrak{B} = \mathfrak{b}.$$

Auf dem letzteren Schenkel bestimme man dann die Punkte M''', C''', für welche

$$O'''\mathfrak{A} \parallel M''M''' \quad O'''\mathfrak{B} \parallel C''C'''.$$

Schliesslich hat man in der Projektion der tesseralen Axen, Fig. 246, folgende Operationen auszuführen:

$$OT = \mathfrak{c}, \quad MTN \parallel O\mathfrak{X}, \quad MT = TN = T''M'''$$
$$STC \parallel O\mathfrak{Y}, \quad TC = T''C''', \quad TS = \tfrac{1}{2}TC$$
$$BSA \parallel O\mathfrak{X}$$

Sind alsdann A, B, C die Durchschnittspunkte der Linien CM, CN, BSA, so geben uns die Verbindungslinien dieser Punkte mit O der Richtung und Länge nach eine schiefe Projektion des gegebenen hexagonalen Axensystems. Die Linien AO, BO, CO sind natürlich noch über den Punkt O hinaus eben so weit zu verlängern, um auch die negativen Halbaxen zu erhalten.

Anmerkung. Ist ξ der Axenwinkel, φ der Normalenwinkel zweier Axenebenen, so hat man zur Berechnung der projizirten Längen der zur Querprojektion des hexagonalen Axensystems nöthigen Linien die Formeln

$$TM = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \mathfrak{a} = \tfrac{4}{7}\,\mathfrak{a}\ \text{(approx.)},\quad TC = \mathfrak{b},\quad TO = \cot\delta \cdot \mathfrak{c},\quad ST = \tfrac{1}{2}\,TC$$

$$\sin\delta = \frac{\sin \xi/2}{\sin 60^0},\quad \cos \xi/2 = \frac{1}{2\cos\varphi/2}$$

δ ist hiebei der wahre Werth des Winkels TOC und kann mit Hilfe der letzten zwei Formeln entweder aus ξ oder φ berechnet werden.

Nach dem Gesagten ist es klar, dass, wenn, Fig. 246, AO, BO, CO der Länge und Richtung nach die Projektion eines hexagonalen Axensystems sind, man die Richtung der morphologischen Axe dadurch findet, dass man die Halbirungspunkte der Seiten BC, CA, AB beziehungsweise mit den Punkten A, B, C verbindet. Der gemeinsame Durchschnittspunkt T dieser Linien gibt dann mit O verbunden die gesuchte Richtung. Die Linien AT, BT, CT geben uns aber die Richtungen der primären Seitenaxen, denn man überzeugt sich leicht, dass die durch diese Linien und OT gelegten Ebenen die primären Hauptschnitte sein müssen; die Durchschnitte der letzteren mit der Ebene ABC, welche parallel dem basischen Hauptschnitte ist, müssen daher die Richtungen der primären Seitenaxen sein. Die Linien BC, CA, AB aber stehen wechselweise senkrecht auf den Linien TA, TB, TC, erstere müssen daher dieselbe Richtung wie die sekundären Seitenaxen haben.

Lässt man die Seitenaxen durch den Punkt O gehen, Fig. 249, und bestimmt sich auf den beiden Hälften der primären Seitenaxen mit Hilfe paralleler Linien solche sechs Punkte P, r...., dass die Seiten des Sechseckes Pr, Qq, Rp parallel den primären Seitenaxen sind, so wird diess Sechseck offenbar die Projektion eines regulären sein, und die Punkte P, r.... werden in Wirklichkeit gleich weit von O abstehen. Dieses Sechseck ist also nichts anderes als der Querschnitt des Deuteroprisma $\{10\bar{1}\}$, seine Seiten werden offenbar halbirt von den sekundären Seitenaxen, auf denen sie senkrecht stehen. Verbindet man nur abwechselnde solcher 6 Punkte, etwa P, Q, R, so erhält man die Projektion eines gleichseitigen Dreieckes, dessen Seiten aber parallel den sekundären Seitenaxen sind. Es ist wohl unmittelbar einleuchtend, wie man diese Verhältnisse benützen kann, um die Projektion von Punkten zu finden, die in Wirklichkeit auf den primären Seitenaxen gleichweit vom Mittelpunkte abstehen.

Für die sekundären Seitenaxen gelten natürlich ganz ähnliche Verhältnisse.

Der allgemeine Weg, die Durchschnittslinien zweier Flächen zu finden, ist natürlich in diesem Systeme der im §. 73 angegebene. Es ist aber hier meist von Vortheil, eine andere Methode anzuwenden, indem man sich nicht die Durchschnittslinien der zwei Flächen mit den Axenebenen zeichnet, sondern mit zweien der Hauptschnitte; in jedem dieser Hauptschnitte erhalten wir dann wieder einen Punkt, der beiden Flächen angehört, und die Verbindung zweier solcher Punkte gibt uns natürlich ebenfalls die gesuchte Durchschnittslinie. Diese Methode setzt die Lösung der folgenden Aufgabe voraus.

Den Punkt und die Linie in der Projektion anzugeben, in welchen die morphologische Axe und der basische Hauptschnitt von der Fläche (hkl) getroffen werden. Man mache auf den Axenrichtungen, Fig. 250,

$$OH = \frac{1}{h}\,OA,\ OK = \frac{1}{k}\,OB,\ OL = \frac{1}{l}\,OC,$$

verbinde die Halbirungspunkte e, f, g der Linien BC, CA, AB mit O. Sind dann e', f', g' die Durchschnittspunkte der Linien eO, fO, gO mit den Linien KL, LH, HK, so verbinde man dieselben beziehungsweise mit den Punkten H, K, L; der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt T' ist dann der Punkt, in welchem die Fläche (hkl) die morphologische Axe trifft. Sind ferner P, Q, R die Durchschnittspunkte der Linien $e'H, f'K, g'L$ mit den primären Seitenaxen, so müssen diese Punkte in einer Geraden liegen, welche die Durchschnittlinie der Fläche (hkl) mit dem basischen Hauptschnitte ist.

Ist einer der Punkte H, K, L z. B. L in unendlicher Entfernung, so werden die Linien HP und KQ parallel der Linie OT, wodurch die ganze Konstruktion sich natürlich sehr vereinfacht. Sind zwei Punkte, etwa K und L, in unendlicher Entfernung, das Symbol der Fläche also (100), so muss offenbar $PH \parallel eO$, $PQ \parallel BC$ sein; T' bestimmt sich alsdann als Durchschnitt der Linien PH und TO.

Die Richtigkeit dieser Konstruktion ist leicht einzusehen, da die Linien $e'H, f'K, g'L$ ja offenber in den primären Hauptschnitten liegen müssen.

Die Durchschnittslinie zweier Flächen zu zeichnen, falls die Punkte T, T' und die Linien L, L' bekannt sind, in welchen dieselben die morphologische Axe und den basischen Hauptschnitt schneiden. Man verlängere

Fig. 251, die Linien L und L' bis zu ihrem Durchschnittspunkte M, so ist der letztere offenbar ein Punkt der Durchschnittslinie der zwei Flächen. Sind ferner G und G' die Durchschnittspunkte dieser Linien mit einer beliebigen primären oder sekundären Seitenaxe, so ist der Durchschnittspunkt N der zwei Linien GT und $G'T'$ ein zweiter Punkt der gesuchten Durchschnittslinie, letztere daher vollkommen bestimmt.

Man sieht, dass man sich auf diese Weise für jede Seitenaxe einen Punkt der Durchschnittslinie zeichnen kann. Die Konstruktion bleibt ganz ähnlich, wenn auch einer oder beide der Punkte T, T' auf der unteren Hälfte der morphologischen Axe liegen, Fällt T und T' zusammen, so hat man ersichtlich nur die Linie MT als Durchschnittslinie.

Es hat jetzt keine Schwierigkeit, die Dipyramide $\{hkl\}$ für den Fall des Gleichgewichtes ihrer Flächen zu zeichnen. Man suche nämlich zuerst, Fig. 252, den Punkt T und die Linie L, in welchem die Fläche (hkl) die morphologische Axe und den basischen Hauptschnitt schneidet. Man suche dann den Durchschnittspunkt P jener Linie mit der dem Hauptschnitte ATO entsprechenden primären Seitenaxe und ebenso den Durchschnittspunkt Q mit der zum Hauptschnitte BOT senkrechten sekundären Seitenaxe. Bestimmt man ferner mit Hilfe paralleler Linien auf den beiden Seiten der primären Seitenaxen die dem Punkte P entsprechenden Punkte, ebenso auf den sekundären Seitenaxen die Punkte, welche in Wirklichkeit gleichweit mit Q von O abstehen, so geben die Verbindungslinien dieser 12 Punkte die Basis der zu zeichnenden Dipyramide, deren übrige Kanten wir dadurch erhalten, dass man jene Punkte auch noch mit den Punkten T und T' verbindet, wo $OT' = OT$.

Für die Protopyramide wird L natürlich parallel einer sekundären Seitenaxe, und wir brauchen die Punkte P nicht weiter zu berücksichtigen. Aehnlich wird die Linie L für die Deuteropyramide parallel einer primären Nebenaxe und die Punkte Q stellen keine Ecken mehr vor. Für die entsprechenden Prismen sind natürlich die Linien OT und OT' unendlich lang, es werden also die durch die Ecken der Basis gehenden Polkanten sämmtlich parallel OT.

Für die Projektion der Dipyramide haben wir vorausgesetzt, dass die Normale der Fläche (hkl) zwischen die Ebenen POT und QOT fällt, was ja im Einklange mit den für die Bezeichnung hexagonaler Formen aufgestellten Prinzipien ist. Mit Hilfe dieser drei Pyramiden lassen sich aber leicht alle anderen hemiedrischen und hemisymmetrischen Formen dieses Systems zeichnen. Die letzteren bestehen ja immer

nur aus gewissen Flächen einer dieser Pyramiden; wir können aber leicht für je zwei Flächen einer Pyramide die Durchschnittslinien konstruiren, da uns ja durch die Zeichnung der Pyramide der Punkt und die Linie gegeben sind, in welchen jede ihrer Flächen die morphologische Axe und den basischen Hauptschnitt schneidet. Wir wollen hier nur noch die Zeichnung des Skalenoeders etwas näher ins Auge fassen.

Um das Skalenoeder $\{hkl\}$, Fig. 253, zu zeichnen, bedürfen wir gar nicht der sekundären Seitenaxen, sondern nachdem wir den Punkt T und die Linie L der Fläche hkl ermittelt haben, bestimmen wir uns die Durchschnittspunkte P, p dieser Linie mit den den Hauptschnitten AOT und COT entsprechenden primären Seitenaxen und bestimmen uns auf jeder Halbaxe die korrespondirenden Punkte P und p. Indem wir nun die Punkte P und p abwechselnd mit T und T' verbinden, so zwar, dass der der Linie L angehörige Punkt mit der oberen Spitze T verbunden ist, so erhalten wir durch diese Linien in den primären Hauptschnitten Kreuzungspunkte n, welche den monoklinischen Ecken des Skalenoeders entsprechen, und die mit T und T' sämmtliche Kanten dieser Form bestimmen.

Verbinden wir die Punkte P, p mit T, T' in umgekehrter Weise, so erhalten wir das inverse Skalenoeder zu dem früheren. Haben wir überhaupt nach der angegebenen Methode ein inverses Skalenoeder (efg) zu zeichnen, so wird der Unterschied nur darin bestehen, dass die Linie L auf der entgegengesetzten Seite von O liegt.

Dasselbe Verfahren hat man auch bei der Zeichnung des Rhomboeders anzuwenden, nur ist alsdann L parallel einer sekundären Seitenaxe und die Verbindungslinien pT stellen keine Kanten, sondern nur die geneigten Diagonalen der Rhomboederflächen vor.

Es versteht sich, dass im Falle des Gleichgewichtes auch für hexagonale Formen und Kombinationen die Verbindungslinie zweier Ecken, die isoschematisch sind mit Bezug auf einen der Hauptschnitte, parallel zu der auf diesem Hauptschnitte senkrechten Hauptaxe sein muss. Ebenso wird alsdann die Verbindungslinie gerade entgegengesetzter Ecken durch den Mittelpunkt gehen müssen. Beide Bemerkungen dienen dazu, die Genauigkeit ausgeführter Zeichnungen zu kontrolliren.

Die Horizontalprojektion eines hexagonalen Axensystems, d. i. die Projektion desselben auf die Fläche (111) wird offenbar aus drei gleichlangen Linien bestehen, die von einem Punkte auslaufen und Winkel von 120^0 untereinander bilden. Die der ZAxe entsprechende

Linie zeichnen wir hiebei im Einklange mit dem Vorhergehenden von oben nach unten.

Die Vertikalprojektion führt man am zweckmässigsten auf der Fläche $(11\bar{2})$ aus, welche ja parallel der morphologischen Axe ist. Ohne den allgemeinen Weg des §. 72 hiebei zu betreten, gelangt man durch folgende Konstruktion zum Ziele, wenn man bedenkt, dass die Fläche $(11\bar{2})$ nichts anderes als die Ebene MNO in Fig. 246 ist. Man mache also, Fig. 254, mit einer beliebigen Länge AO'

$$AO'B = \xi \quad AO' = BO' \quad AC' = C'B = AB$$

bestimme den Punkt T, in welchem sich die drei Höhen des gleichseitigen Dreieckes ABC' schneiden und konstruire den Punkt O'', für welchen

$$C'TO'' = 90^0 \quad C'O'' = AO'$$

Ist dann C der Durchschnittspunkt der Linien AB und $C'O'$, und O der Punkt der letzteren Linie, für welchen

$$CO = TO''$$

so geben AO, BO, CO der Grösse und Richtung nach die gesuchte Vertikalprojektion.

Anhang. Da man häufig bei der Beschreibung hexagonaler Krystalle nicht den Axenwinkel ξ, sondern nur den Normalenwinkel φ der Axenebenen, d. i. der Flächen (100), (010), (001) angegeben findet, so wollen wir noch zeigen, wie man auch in diesem Falle eine richtige Zeichnung der Axen entwerfen könne, ohne zur Rechnung seine Zuflucht nehmen zu müssen. Es genügt hiebei, zu zeigen, wie man auf dem Wege der Konstruktion in diesem Falle aus dem Normalenwinkel der Axenebenen den Winkel ihrer Kanten finden könne. Beginnen wir mit dem umgekehrten Probleme. Sind in Fig. 255 OA, OB, OC die Projektion eines hexagonalen Axensystems, und errichten wir im Punkte A zwei Senkrechte, welche beziehungsweise in den Axenebenen XY und XZ liegend die beiden anderen Axen in den Punkten F und G schneiden, so ist FAG offenbar der Neigungswinkel der XY- und YZEbene und also gleich $180^0 - \varphi$. Die wirkliche Gestalt des Dreieckes FAG lässt sich aber leicht auf folgende Weise ermitteln. Man mache, Fig. 256, mit einer beliebigen Länge AO

$$BOA = \xi, \; AO = BO, \; FAO = 90^0, \; OG' = OF$$

wo F ein Punkt der Linie OB, G' aber ein Punkt der Linie AO ist. Man bestimme nun den Punkt G, für welchen

$$GF = G'F \quad GA = FA$$

und verlängere die Linie FA über A etwa bis F', so ist $F'AG$ gleich dem Normalenwinkel φ zweier Axenebenen.

Diese Relation zwischen einem Kanten- und Normalenwinkel muss aber dem §. 5 zufolge auch noch richtig bleiben, wenn wir diese Winkel vertauschen. Hiedurch erhalten wir schliesslich zur Ermittlung des Werthes von ξ mit Hilfe des Normalenwinkels φ zweier Axenebenen die folgende Konstruktion:

Man mache, Fig. 256, mit einer beliebigen Länge AO

$$AOB = \varphi, \; AO = BO, \; FAO = 90^0, \; OG' = OF$$

wo F ein Punkt der Linie BO und G' ein Punkt der Linie AO ist, suche ferner den Punkt G, für welchen

$$FG = FG', \; GA = FA$$

und verlängere FA über A etwa bis F'. Alsdann ist

$$GAF' = \xi.$$

§. 80. Projektion von Kombinationen und die mechanische Ausführung von Krystallzeichnungen überhaupt.

1. Hat man eine Kombination der n Flächen P zu zeichnen, so ist natürlich das erste, dass man sich nach den vorhergegangenen Regeln eine richtige Projektion des Axensystems des betreffenden Krystalles anfertigt. Hat man dann eine Skizze der Kombination, die, was die Anordnung der Kanten betrifft, ziemlich genau ist, so kann man beliebig mit einer der längeren Kanten der Kombination zu zeichnen beginnen und daran successive nach der Skizze die übrigen Kanten ansetzen, deren Richtungen ja mit Hilfe des §. 73 leicht gefunden werden können.

Allein wenn man die Skizze einer Kombination auszuführen versucht, so findet man meist, dass mit Bezug auf die kleineren Flächen einige der skizzirten Kanten gar nicht auftreten können, dass dafür aber andere Flächen zum Durchschnitte kommen. Das sicherste Verfahren ist daher das, zuerst bloss eine Kombination der vorherrschenden der Flächen P zu konstruiren, dann zu dieser Fläche eine weitere Fläche P hinzuzufügen, ist diess geschehen, die nächste Fläche P einzutragen u. s. f. Freilich muss man hiebei viele Kanten zeichnen, die beim Eintragen der folgenden Flächen oft wieder verschwinden, so dass die zur Zeichnung solcher Kanten verwendete Mühe eigentlich eine verlorene ist. Nach dieser Methode würde man z. B. beim Zeichnen der Fig. 219, wenn man keine genaue Skizze derselben besitzt, zuerst

eine Kombination der Flächen *m*, *q*, *o* mit ihren Parallelen konstruiren, dann successive die Kombinationen *oqrm*, *oqrml*, *oqrmln*, *oqrmnlp*, *oqrmlnpa*, und schliesslich die vollständige Kombination *oqrmlnpas* zeichnen. Etwas anderes ist es jedoch, wenn etwa die Aufgabe gestellt wäre, die gegebene Fig. 219 in einer anderen Projektion auszuführen. Da wird man, etwa von dem Durchschnittspunkte der Flächen *m*, *l*, *g* anfangend, nur die wirklich vorkommenden Kanten *ml*, *lz*... konstruiren.

Die Konstruktionen, welche nöthig sind, um die Richtungen einzelner Kanten zu finden, kann man bei einiger Uebung gleich über dem Axensysteme ausführen, welches der ganzen Kombination zu Grunde liegt. Sonst kann man sich auf dem zum Zeichnen dienenden Papiere das Axensystem mehrmals in paralleler Stellung auftragen und diese einzelnen Axensysteme zur Konstruktion der Kanten verwenden. Ja man kann diess auch auf ganz getrennten Blättern vornehmen, nur muss man bei parallelem Uebertragen der Kanten diese Blätter auch wirklich so zur Hauptzeichnung legen, dass die Axensysteme parallel werden. Da die Kanten tautozonaler Flächen alle einander parallel sind, so genügt es, die Richtung einer einzigen dieser Kanten zu konstruiren.

2. Kommt in einem Krystalle mit jeder Fläche auch eine Parallele vor, die gleichweit vom Mittelpunkte absteht, so wird ein solcher Krystall durch jede durch den Mittelpunkt gelegte Ebene in zwei enantiomorphe Hälften getheilt. Eine Folge hievon ist, dass, wenn man die Zeichnung eines solchen Krystalles auf daraufgelegtes Pauspapier durchzeichnet, dann letzteres um den Mittelpunkt um 180° herumdreht, die Pause wiederum die Zeichnung Linie für Linie decken muss, nur werden jetzt die vorderen Linien der Pause mit den hinteren Linien der Zeichnung zusammenfallen und umgekehrt.

Man kann diesen Umstand ersichtlich erstens zur Kontrolle der Richtigkeit solcher Zeichnungen benützen, zweitens aber auch dazu, um sich die Mühe der Konstruktion der halben Figur zu ersparen, indem man die andere Hälfte aus der um 180° gedrehten Pause etwa mittelst feiner Nadelstiche entnimmt. Es ist hiebei nach dem Früheren ganz gleichgiltig, wie man die Figur halbirt. So wurde in Fig. 160 nur die obere Hälfte wirklich gezeichnet.

3. Hat man eine Kombination der F o r m e n *p*, *q*, *r*... für den Fall des Gleichgewichtes zu zeichnen, so hat man im Allgemeinen wieder die früher beschriebene Methode einzuschlagen. In diesem Falle müssen, wenn sich eine Fläche der Form *p* mit einer Fläche der Form *q* wirklich schneidet, in der Kombination auch alle Kanten vorkommen,

die bei der Kombination der zwei Formen *p*, *q* im Falle des Gleichgewichtes gebildet werden. Man wird daher als Hilfskonstruktion gleich die ganze Kombination *pq* zeichnen. Findet man hiebei, dass den gegebenen Indices zufolge die Form *p* ganz innerhalb der Form *q* liegt, so hat man die Form *p* zu vergrössern entweder durch parallele Linien oder, indem man die Parameter dieser Form mit einer entsprechenden Zahl multiplizirt. Denselben Zweck erreicht man natürlich durch Verkleinerung der Form *q*.

Aehnliches gilt mit Bezug auf die Flächen einer und derselben Form; kommen zwei solche Flächen in der allgemeinen Kombination zum Durchschnitte, so wird man gleich die ganze Form als Hilfskonstruktion ausführen.

Auch in dem jetzt betrachteten Falle verfährt man wieder so, dass man die vorherrschenden Formen zuerst zeichnet und dann die übrigen Formen nach und nach einträgt. Hätte man z. B. die tetragonale Kombination, Fig. 194, zu konstruiren, so zeichne man zuerst die Form {321}*r* und trage dann successive die Formen {110}*m*, {320}*s*, {101}*q*, {111}*o* ein. Man braucht hiezu nur für die Kanten *rq* und *qq'* Hilfskonstruktionen. Die Kanten *mr* sind ja parallel den Kanten *rq* und die Kanten *mm'* und *ms* parallel der *Z*Axe, die Kanten *oq* aber sind parallel den Durchschnitten der Flächen *q* mit den Axenebenen *XZ* und *YZ*, dagegen die Kanten *rs* parallel den Durchschnitten der Flächen *r* oder *s* mit der Axenebene *XY*; für die letzteren zwei Arten von Kanten ist daher kaum eine eigene Konstruktion nöthig, sobald man nur die Parameter der betreffenden Flächen auf das Axensystem aufgetragen hat.

4. Besitzt man keine genaue Skizze des zu zeichnenden Krystalles, so hat man immer mit der Schwierigkeit zu kämpfen, die einzelnen Flächen in der Zeichnung von der gewünschten relativen Ausdehnung zu erhalten. Es ist dann meist nöthig, die Figur zweimal zu zeichnen, da erst, wenn man die richtige Lage der Kanten kennt, den einzelnen Flächen die richtige Ausdehnung ertheilt werden kann. Es ist eine gute Uebung, ein und dieselbe Kombination, z. B. Fig. 206, bei verschiedener Flächenausdehnung zu zeichnen. Am leichtesten ist es noch, den Prismen oder Domen von vornherein die gewünschte Flächenausdehnung zu geben, daher man die Projektion eines Krystalles auch meist mit der Zeichnung seiner vorherrschenden Prismen oder Domen beginnt. Man zeichnet nämlich in diesem Falle, wenn die Domen etwa parallel der *X*Axe sind, zuerst den Querschnitt derselben

mit der YZEbene, obwohl diese Linien keine Kanten sind und schliesslich wieder weggelöscht werden müssen.

5. Die im Vorhergehenden vorzüglich mit Rücksicht auf schiefe Projektionen gegebenen Regeln gelten auch noch für die Vertikal- und Horizontalprojektionen. Wegen der grösseren Einfachheit der letzteren ist es jedoch bei denselben kaum nöthig, die Hilfskonstruktionen über besonderen Axensystemen auszuführen, sondern man macht bei einiger Uebung leicht alle diese Konstruktionen über ein und demselben Axensysteme.

Bei diesen Projektionen ist es aber leicht, den Flächen die gewünschte relative Ausdehnung in der Zeichnung zu geben, ein Umstand, der dazu dienen kann, auch bei der schiefen Projektion die Flächenausdehnung zu regeln. Hat man nämlich eine schiefe Projektion S und eine Horizontalprojektion H desselben Krystalles mit derselben Längeneinheit verfertigt, und bringt nun H so unter S, dass ihre Mittelpunkte in einer vertikalen Linie liegen, die XAxe von H aber gegen eine horizontale Linie um den Drehungswinkel δ der schiefen Projektion gedreht ist, so muss auch die Verbindungslinie je zwei entsprechender Ecken von H und S vertikal sein. Es geht diess aus dem im §. 71 über die Projektion eines tesseralen Axensystems Gesagten hervor. Konstruirt man sich also zuerst eine Horizontalprojektion des gegebenen Krystalles in einer Stellung, wo die XAxe um den Winkel δ gedreht ist, zeichnet dann vertikal darüber den Krystall in schiefer Projektion, so muss jedes Eck der letzteren in der vertikalen Linie liegen, die durch das entsprechende Eck der horizontalen Projektion hindurchgeht.

6. Die mechanische Ausführung einer Krystallzeichnung geschieht auf gutem Zeichenpapier, von dem man etwa ein Quartblatt auf einem Reissbrett befestigt. Zur Befestigung genügt etwas Wachs, das man unter die vier Ecken des Blattes bringt. Das Reissbrett soll nicht zu gross sein, damit man es bequem nach allen Seiten drehen kann. Ist das Papier aber für die Hilfskonstruktionen zu klein, so nimmt man letztere auf separaten Blättern vor, die man bei der Uebertragung der Linien ebenfalls mit Wachs auf dem Reissbrette in paralleler Stellung neben der Hauptzeichnung befestigt.

Zum Ziehen der Linien, besonders der parallelen, bedient man sich mit Vortheil zweier gleich grossen, stählernen Dreiecke. Dieselben sind rechtwinklig und haben in der Mitte einen Knopf, um sie bequem anfassen zu können; die Längen ihrer Katheten sind ungefähr 8·5 und 16·5 Millimeter. Für jedes Dreieck ist es am besten, wenn der Knopf

sich auf derjenigen Seite des Dreieckes befindet, welche nach Os gewendet ist, im Falle die längere Kathete vertikal steht und die kü zere nach Süden zeigt. Sind die Dreiecke nicht zu dick, so ist es besten, wenn die oberen Kanten derselben nicht facettirt sind.

Alle zur Konstruktion einer Zeichnung dienenden Linien wer mittelst eines harten Bleistiftes auf das Papier schwach tracirt, sehr genaue Konstruktionen kann man sich auch bloss einer Stahlspi bedienen. Der Bleistift wird bei horizontalen Linien etwas von d Zeichner weggeneigt gehalten, damit die Spitze desselben möglicl nahe der unteren Kante des als Lineal dienenden Dreieckes hinfüh Aehnlich wird der Bleistift bei anderen Linien gehalten. Man erthe dem Bleistifte eine feine Spitze durch Abreiben desselben auf Papi oder auf anderen, etwas rauheren Körpern.

Sind alle Konstruktionen ausgeführt, so zieht man die eigent lichen Kanten des Krystalles mit dem harten Bleistifte stärker aus und fährt dann über das Ganze wiederholt mit Gummi elasticum hinweg, wodurch alle Hilfslinien entfernt werden. Man kann nun allenfalls die Kanten der Figur nochmals mit einem etwas weicheren Bleistifte oder mit Tusch nachfahren. Hiebei werden wie auch bei der ganzen Konstruktion nur die vorderen Kanten des Krystalles vollständig ausgezogen, die hinteren Kanten werden gewöhnlich punktirt oder nur mit kleinen Strichen ausgezogen. Das letztere ist wenigstens für die Hilfskonstruktionen wegen Zeitersparnis anzuempfehlen.

Will man die angefertigte Krystallzeichnung auf ein anderes Blatt übertragen, wie diess z. B. die Zusammenstellung einer Tafel nöthig macht, so kann man die Ecken der ursprünglichen Figur durch Stiche mit einer feinen Nadel auf das andere Blatt übertragen. Allein dies Verfahren ist wegen der Dicke des Zeichenpapiers nicht sehr gen Besser ist es, die ganze Figur auf Pauspapier, welches man mit einig Tropfen Gummi an den Ecken auf die Projektion heftet, durchzuzeic nen und erst von da die Ecken durchzustechen. Die Uebertragung vo Pauspapier kann auch so geschehen, dass man unter dasselbe ein a färbendes dünnes Papier bringt und dann die Zeichnung mit ein harten Bleistifte oder mit sonst einer Spitze nachfährt.

Die Uebertragung mittelst Pauspapier ist besonders dann anz empfehlen, wenn man gleichzeitig die Zeichnung der halben Figur e sparen will (siehe oben).

7. Diese Uebertragungsmethode schlägt man auch ein, we eine Krystallzeichnung auf lithographischen Stein übertragen wi Nur muss man dann vorher die Pause umkehren, da ja behufs des ric

tigen Abdruckes die Zeichnung sich auf dem Steine in verkehrter Stellung befinden muss. Man schwärzt gewöhnlich den Stein und legt unter die Pause ein roth abfärbendes Papier, oder man reibt gleich die untere Seite der Pause mit einem rothen abfärbenden Pulver ein.

Die Zeichnung wird mit Hilfe einer feinen Stahlspitze und der zwei stählernen Dreiecke in den Stein gravirt. In Bezug der Haltung der Stahlspitze gilt dasselbe, was wir früher über die Haltung des Bleistiftes gesagt haben. Dicke Linien sollen nicht durch tiefes Eingraviren, sondern durch flache, breite Striche auf dem Steine hervorgebracht werden, weil sonst beim Abdrucke die Linien unrein werden. Den Stein legt man beim Graviren zweckmässig auf eine leicht drehbare Unterlage, um alle Linien in horizontaler Richtung ziehen zu können.

Kreise und Kreisbogen gravirt man mittelst eines stählernen, sogenannten Tasterzirkels. Sollen beliebige Kurven gravirt werden, so schneidet man sich für dieselben eine Patrone aus Pappe, oder man wendet ein Kurvenlineal an. Fehlerhaft gravirte Punkte und Linien deckt man mit etwas Gummilösung zu.

§. 81. Zeichnung der Zwillingskrystalle.

Nach dem, was wir bereits über das Zeichnen der Krystalle gesagt haben, brauchen wir, um auch die Projektion eines Zwillingskrystalles ausführen zu können, offenbar nur noch zu zeigen, wie man für das zweite Individuum des Zwillings die Projektion seines um 180° gedrehten Axensystems und den Durchschnitt irgend einer Fläche desselben mit irgend einer Fläche des ersten Individuums findet. Ja es genügt schon, die erste Aufgabe bloss für ein tesserales Axensystem zu lösen, da wir in den früheren Paragraphen gesehen haben, dass man die Zeichnung schiefaxiger Krystalle immer mit Hilfe eines rechtwinkligen Axensystems ausführen kann.

1. Aufgabe. In der Projektion eines tesseralen Axensystems den Punkt E anzugeben, in welchem die Fläche Q von der aus dem Axenmittelpunkte auf sie gefällten Normale getroffen wird.

Sind in Fig. 257 OA, OB, OC der Länge und Richtung nach die Projektionen der tesseralen Axen OM, ON, OP die projizirten Parameter der Fläche Q, so ist, wie aus §. 70 hervorgeht, E der Durchschnittspunkt der drei Höhen MR, NS, PT des Dreieckes MNP. Es handelt sich also nur darum, die Punkte R, S, T zu finden. Den Punkt R findet man aber auf folgende Weise. Man ziehe durch N und P Parallele zur Linie BC, welche beziehungsweise die Y- und ZAxe in den

Punkten N' und P' schneiden; ergänzt man dann das Parallelogramm $N'OP'U$, so ist der Kreuzungspunkt der Linien OU und NP der gesuchte Punkt R. Auf ähnliche Weise findet man aber auch die Punkte S und T.

Der Beweis für die Richtigkeit dieser Konstruktion ergibt sich leicht, wenn man sich die Linien und Winkel der YZEbene mit ihren wahren Werthen zeichnet. Das Dreieck NOP ist alsdann kongruent mit dem Dreiecke $UN'O$, die zwei Winkel NPO und UON' also einander gleich, und da die einen Schenkel dieser Winkel auf einander senkrecht stehen, so muss diess auch für die anderen zwei Schenkel OR und NP gelten. Die Ebene ROM ist daher wirklich senkrecht zur Linie NP.

Sind zwei der Parameter der Fläche Q in Wirklichkeit gleich gross, so wird natürlich die entsprechende Seite des Dreieckes MNP durch die zugehörige Höhe halbirt. Ist einer der Parameter unendlich, so fällt der Punkt E mit dem entsprechenden der Punkte M, N, P zusammen.

2. Aufgabe. Gegeben sei die Projektion eines Axensystems und des Punktes E, in welchem die Fläche Q von der aus dem Axenmittelpunkte auf sie gefällten Senkrechten getroffen wird: es soll die Lage des Axensystems in Zwillingsstellung mit Bezug auf die Fläche Q bestimmt werden.

Es seien in Fig. 258 OA, OB, OC der Grösse und Richtung nach die Projektionen der Axen, OM, ON, OP die projizirten Parameter der Fläche Q, und E sei der Punkt, in welchem letztere von der aus O auf sie gefällten Normale getroffen wird. Man verlängere die Linie OE über E bis O', so dass $OE = EO'$, und ziehe durch die Punkte A, B, C Parallele mit OE, welche die Linien $O'M$, $O'N$, $O'P$ beziehungsweise in den Punkten A', B', C' schneiden. Die Linien $O'A'$, $O'B'$, $O'C'$ geben dann offenbar der Grösse und Richtung nach die Projektion des ursprünglichen Axensystems in einer um die Normale der Fläche Q um 180^0 gedrehten Stellung.

Man kann nun die beiden Axensysteme nach Bedürfnis parallel zu einander verschieben. Im Falle des Gleichgewichtes müssen für einen Penetrationszwilling die beiden Mittelpunkte O und O' zusammen fallen, für einen Juxtapositionszwilling aber muss dann ihre Verbindungslinie OO' parallel der Zwillingsaxe OE sein. Ist letzteres der Fall, so schneiden sich die korrespondirenden Axen der beiden Individuen im Raume, und die so erhaltenen Punkte M, N, P liegen offenbar

mit dem Halbirungspunkte E der Linie OO' in einer und derselben Ebene, welche nichts anderes als die Zwillingsfläche ist.

Ist einer der Parameter der Fläche Q gleich ∞, so werden natürlich zwei korrespondirende Axenrichtungen einander parallel.

3. **Aufgabe.** Es soll die Projektion des Punktes D angegeben werden, in welchem die Fläche $R(hkl)$ von einer Linie getroffen wird, die durch den Axenmittelpunkt geht und auf der Fläche Q senkrecht steht.

Es seien in Fig. 259 OH, OK, OL die Projektionen der Parameter der Fläche R, ebenso OM, ON, OP die Parameter der Fläche Q, und E der Punkt, in dem letztere Fläche von der aus O auf sie gefällten Normale geschnitten wird. T sei der Kreuzungspunkt der Linie PE mit MN, und U der der Linie OT mit HK; da die Punkte O, P, L, E, T, U offenbar alle in einer Ebene liegen, so ist schliesslich der Kreuzungspunkt der Linien OE und UL der gesuchte Punkt D. Dasselbe Verfahren könnten wir mit Bezug auf die Punkte H und K einschlagen und so zwei weitere Linien erhalten, die ebenfalls die Linie OE in demselben Punkte D schneiden.

4. **Aufgabe.** Die Richtung der Durchschnittslinie der Flächen $R(hkl)$ und $R'(h'k'l')$ zweier Zwillingsindividuen zu finden, wenn die Projektion der beiden Axensysteme gegeben ist.

Wir denken uns die beiden Axensysteme so verschoben, dass die Verbindungslinie OO', Fig. 260, ihrer Mittelpunkte parallel der Zwillingsaxe wird. Ist dann E der Halbirungspunkt der Linie OO', und sind M, N, P die Durchschnitte der korrespondirenden Axenrichtungen, so ist E der Punkt, in welchem die Zwillingsfläche MNP von der zu ihr senkrechten Linie OO' geschnitten wird. Trägt man nun auf das eine Axensystem die Parameter OH, OK, OL der Fläche R, auf das andere die Parameter OH', OK', OL' der Fläche R' auf, so kann man, mit Hilfe der vorhergehenden Aufgabe für jedes Axensystem leicht die Punkte D und D' bestimmen, in welchen die Flächen R und R' von der Linie OO' geschnitten werden. Da ferner solche vier Punkte, wie D, D', H, H' in einer Ebene liegen, so werden sich die Linien DH und $D'H'$ wirklich im Raume in einem Punkte U schneiden, welches ein Punkt der gesuchten Durchschnittslinie RR' sein muss, da der Punkt U in den beiden Flächen R und R' liegt. Ebenso geben die Linien DK und DK' einen zweiten Punkt V, die Linien DL und DL' aber einen dritten Punkt W der Linie RR'. Demzufolge müssen die drei Punkte U, V, W in einer Geraden liegen, welches die gesuchte Durchschnittslinie der Flächen R und R' ist.

Um die Richtung der Durchschnittslinie korrespondirender Flächen SS' zu finden, braucht man nur die Durchschnittslinie einer dieser Flächen S mit der Zwillingsfläche Q zu bestimmen. Diese Durchschnittslinie SQ ist parallel der Durchschnittslinie SS', da ja drei Flächen wie S, S', Q in einer Zone liegen.

Bisweilen projizirt man Zwillinge auf eine Ebene R, welche senkrecht steht auf der Zwillingsfläche Q. Dann müssen natürlich in der Projektion die Punkte M, N, P, E in einer Geraden liegen, welche senkrecht zur Linie OE ist. Die Bestimmung des Punktes O ist hiedurch sehr leicht gemacht. Der Linie MNP gibt man gewöhnlich eine vertikale Lage.

Ein spezieller Fall dieser Projektionsmethode ist die Horizontalprojektion eines Zwillings, für welchen die ZAxen beider Individuen einander parallel sind, indem alsdann die der ZAxe parallele Zwillingsfläche senkrecht zur Projektionsebene ist. Es wäre unzweckmässig, für eine andere Lage der Zwillingsfläche die Horizontalprojektion anzuwenden, indem alsdann immer das zweite Individuum in schiefer Projektion erscheinen würde.

Das Gleiche gilt in Betreff der Vertikalprojektion.

Bisweilen projizirt man Zwillingskrystalle so, dass die Zwillingsfläche die Stellung einnimmt, welche sonst eine der Axenebenen hat. Wir erkennen nämlich durch Gewohnheit die Symmetrie eines Körpers nach einer Ebene am leichtesten, wenn diese Ebene vertikal oder horizontal ist. Wir werden aber bei Berücksichtigung bloss rechtwinkliger Axensysteme derlei Projektionen auszuführen im Stande sein, sobald wir die nachfolgende Aufgabe lösen können.

Aufgabe. Gegeben sei die Projektion eines rechtwinkligen Axensystems, einer Fläche Q und des Punktes O, in welchem letztere Fläche von der aus dem Axenmittelpunkte auf sie gefällten Senkrechten getroffen wird: es soll die Projektion des Axensystems in einer Lage angegeben werden, bei der die Fläche Q parallel der ursprünglichen Axenebene YZ ist, Fig. 261.

Es seien OH, OK, OL der Grösse und Richtung nach die Parameter der Fläche Q und E der Punkt, in welchem dieselbe von der aus O auf sie gefällten Normale getroffen wird. Ist auf der XAxe $OH_1 = -OH$, und ist R der Durchschnittspunkt der Linien HE und KL, so sind in Folge der rechtwinkligen Axen die Flächen HKL und H_1KL gleich geneigt zur YZEbene, und die Linie KL ist senkrecht zu den Linien RH, RO und RH_1. Dreht man daher das Axensystem um die Linie KL, bis die Fläche Q die Lage der Axenebene

YZ hat, so wird nach der Drehung die Linie *RH* die Richtung *RO*, die Linie *RO* aber die Richtung RH_1 haben, die Linie *EO* wird ferner parallel der Linie *HO*. Nennen wir also die Lagen der Punkte *H*, *E*, *O* nach der Drehung *H'*, *E'*, *O'*, so werden *H'* und *O'* auf der Linie *RO*, der Punkt *O'* aber auf der Linie RH_1 liegen müssen. Halbirt man nun die Linie *OE* und zieht durch den Halbirungspunkt *F* eine Parallele mit *OH*, so ist der Durchschnittspunkt dieser Parallelen mit *RO* der gesuchte Punkt *E'*, da sich leicht zeigen lässt, dass in der Wirklichkeit die Dreiecke *REF* und *RFE'* mit einander kongruent sind. Der Durchschnittspunkt der Linien *E'F* und RH_1 ist aber offenbar der gesuchte Punkt *O'* und der Durchschnittspunkt der Linie *RE'* mit einer durch *H* parallel zu *EE'* gezogenen Geraden der Punkt *H'*, da zufolge jener kongruenten Dreiecke $RE = RE'$ und daher auch $RH = RH'$ sein muss. Die Linien *H O'*, *KO'*, *LO'* geben somit der Länge und Richtung nach die Parameter der Fläche *Q*, wenn letztere eine der ursprünglichen Axenebene *YZ* parallele Stellung einnimmt. Die Axenlängen in der neuen Lage findet man leicht durch die Bemerkung, dass sich dieselben zu den neuen Parametern der Fläche *Q* gerade so verhalten müssen, wie die alten Axenlängen zu den alten Parametern. Kennt man die Zahlenwerthe der Parameter, so braucht man nur die neuen Parameter durch diese Zahlen zu dividiren, um die neuen Axenlängen zu erhalten.

Ist *O''* der Durchschnittspunkt der Linien *RH* und *O'E'*, so sind offenbar *H'O''*, *KO''*, *LO''* Axenrichtungen, welche sich gegen die Axenrichtungen *H'O'*, *KO'*, *LO'* mit Bezug auf die Fläche *Q* in Zwillingsstellung befinden. Es ist *O'E'* senkrecht zur Ebene *KOL* und $O'E' = E'O''$.

Aehnlich würde das einzuschlagende Verfahren sein, wollte man die Fläche *Q* parallel einer der zwei übrigen Axenebenen machen.

12. Kapitel.

Verzeichnung der Flächenpole der Krystalle.

§. 82. Stereographische Projektion.

Wir haben schon gesehen, dass auch die schematischen Projektionen ein sehr wichtiges Hilfsmittel für das Studium der Krystalle abgeben und besonders diejenigen unter diesen Projektionen, bei denen die Krystallflächen durch die Pole derselben repräsentirt werden. Diese Art von Projektionen wird besonders da, wo es sich um die Berechnung der Elemente, Winkel etc. eines Krystalles handelt, ein unentbehrliches Bedürfnis.

Die Pole der Flächen sind bekanntlich jene Punkte, in welchen die von einem Punkte *O* im Inneren des Krystalles auf diese Flächen gefällten Normalen eine um diesen Punkt *O* beschriebene Kugel schneiden. Letztere Kugel nennen wir die Sphäre der Projektion, die Aufgabe dieses Kapitels ist aber, zu zeigen, wie man eine richtige Zeichnung dieser Sphäre mit ihren Polpunkten anfertigen könne. Wir werden also gerade so wie im vorhergehenden Kapitel das Auge in eine gewisse Entfernung von der Sphäre versetzt denken, und dieselbe auf eine Ebene projiziren, welche senkrecht zum Gesichtsstrahl ihres Mittelpunktes ist. Setzen wir wie früher das Auge in unendliche Entfernung, so werden wir eine sogenannte orthoskopische Projektion der Sphäre erhalten. Diese Projektion, deren Anfertigung übrigens nach dem schon Gesagten keine Schwierigkeiten darbieten würde, ist jedoch von geringerem Vortheile als die sogenannte stereographische.

Bei der stereographischen Projektion befindet sich das Auge in der Sphäre selbst, die auf dem Gesichtsstrahle des Mittelpunktes senkrechte Projektionsebene geht aber durch eben diesen

Mittelpunkt hindurch. Das Auge ist also in diesem Falle der Pol der Projektionsebene, welche die Sphäre in einem grössten Kreise, dem Grundkreise schneidet. Der Vortheil dieser Projektion besteht nun darin, dass jeder Kreis der Sphäre auch in der Projektion als Kreis erscheinen wird, die Pole tautozonaler Flächen werden daher in der Projektion Punkte eines und desselben Kreises sein müssen. Ebenso werden Pole, die auf der Sphäre von einem Punkte derselben gleichweit abstehen und daher in einem Kreise der Sphäre liegen, diess auch in der Projektion thun müssen; dieser letztere Umstand ist allerdings nicht von so grosser Wichtigkeit, als das für die Pole tautozonaler Flächen Angeführte.

Um aber diese Eigenschaft der stereographischen Projektion zu beweisen, wollen wir zuerst einen schiefen Kegel mit kreisförmiger Basis Z, Fig. 262, betrachten, dessen Schnitt mit einer Ebene, die durch seine Axe geht und senkrecht zur Basis ist, das Dreieck ABC sein soll. Jede Ebene, parallel zur Basis, wird natürlich diesen Kegel in einem Kreise schneiden, es lässt sich aber noch ein zweites System paralleler Ebenen angeben, die einen solchen Kegel ebenfalls in Kreisen schneiden. Sind nämlich D und E zwei solche Punkte der Linien BC und AC, für welche der Winkel

$$BAC = EDC$$

ist, und legt man durch die Linie DE eine zur Ebene ABC senkrechte Ebene, so wird dieselbe den Kegel in einer Kurve X schneiden, die ebenfalls ein Kreis ist. Wir können von dieser Kurve nämlich beweisen, dass, wenn man von einem beliebigen Punkte F derselben eine Senkrechte auf DE fällt, welche diese letztere Linie im Punkte N trifft, dass alsdann $FN^2 = DN.NE$ ist; dieser Gleichung zufolge muss aber F ein Punkt eines um den Durchmesser DE konstruirten Kreises sein.

Um hievon die Richtigkeit nachzuweisen, legen wir durch FN eine zur Basis parallele Ebene, welche den Kegel in einem Kreise Z' schneiden wird, dessen Durchmesser $A'B'$ ist. Die Linie FN ist senkrecht zur Ebene ABC, da sie ja in der zur ABC senkrechten Ebene DFE senkrecht zur Durchschnittslinie dieser zwei Ebenen gezogen wurde; FN wird also auch senkrecht zur Linie $A'B'$ der Ebene ABC sein, und wir haben folglich, da F ein Punkt des Kreises Z' ist, der bekannten Eigenschaft eines Kreises zufolge die Gleichung

$$FN^2 = A'N.NB'$$

Nun ist aber unserer Annahme zufolge

$$B'DN = 180^0 - CDE = 180^0 - BAC = NA'E$$

$$B'ND = A'NE$$

daher

$$\triangle B'DN \sim \triangle A'EN$$
$$B'N : EN = DN : A'N$$
$$B'N . A'N = EN . DN$$

Die letzte Gleichung gibt aber für FN^2 auch den Ausdruck

$$FN^2 = EN . DN$$

welches aber die zu beweisende Gleichung ist. Es ist somit, da F einen ganz willkürlichen Punkt der Kurve X bedeutet, gezeigt, dass jede Ebene, die parallel DE ist und auf ABC senkrecht steht, den betrachteten Kegel in einem Kreise schneidet.

Wenden wir nun den eben bewiesenen Satz auf die stereographische Projektion an. Es sei C der Punkt der Sphäre der Projektion, Fig. 263, in den wir unser Auge versetzt denken, Z aber ein beliebiger Kreis auf derselben. Der durch den Mittelpunkt von Z und durch C gelegte grösste Kreis der Sphäre sei durch S gegeben; derselbe wird Z in zwei Punkten, A und B schneiden, und es wird AB der Durchmesser des Kreises Z sein, der letztere aber auf der Ebene von S senkrecht stehen müssen. Es folgt diess aus dem bekannten Satze, dass die Verbindungslinie des Mittelpunktes eines Kreises Z einer Kugel mit dem Zentrum der letzteren auf der Ebene des Kreises senkrecht steht. Um nun die stereographische Projektion des Kreises Z zu finden, haben wir uns die Projektionsebene durch das Zentrum O der Sphäre senkrecht zum Gesichtsstrahl OC desselben gelegt zu denken, so dass die Sphäre von dieser Ebene etwa in dem Grundkreise T geschnitten wird. Verbinden wir nun jeden Punkt des Kreises Z mit C, so werden diese Linien die Ebene T in einer Kurve X schneiden, welche die gesuchte stereographische Projektion des Kreises Z vorstellt. X wird aber ebenfalls ein Kreis sein, wie aus dem zuvor bewiesenen Satze folgt. Die Linien ZC bilden nämlich die Mantelfläche eines schiefen Kegels mit kreisförmiger Basis Z; ein solcher Kegel wird aber auch noch von anderen Ebenen in Kreisen geschnitten, falls die Lage dieser Ebenen entsprechend den im vorhergehenden Satze angegebenen Bedingungen ist. Letzteres ist aber für die Ebene T wirklich der Fall, denn erstens ist dieselbe senkrecht zur Linie OC, und daher auch zur Ebene S, welche durch die Axe des Kegels gehend senkrecht auf dessen Basis steht. Sind aber D und E die Punkte, in welchen die Ebene von X die Linien BC und AC trifft, F und G aber die Durchschnittspunkte der Kreise S und T, so werden die vier Punkte D, E, F, G und das Zentrum C in einer Geraden liegen, da ja jeder von ihnen den beiden Ebenen S und T

angehört. Da nun FG senkrecht ist zu OC, so erhalten wir mit Berücksichtigung der Eigenschaft des Kreises, dass Peripheriewinkel, die über denselben Bogen stehen, gleich gross sind, durch Betrachtung des Kreises S die Gleichung

$$\begin{aligned} DEC &= FGC + GCB \\ &= GFC + GAB = GAC + GAB \\ &= BAC \end{aligned}$$

Die Ebene T erfüllt somit auch die zweite der erwähnten Bedingungen, X ist also wirklich ein Kreis und die angegebene Eigenschaft der stereographischen Projektion hiedurch bewiesen.

Wir wollen im Nachfolgenden, wenn wir von der Projektion der Sphäre sprechen, immer eine stereographische Projektion dabei verstehen.

§. 83. Eigenschaften der Projektion eines grössten Kreises.

Die Fig. 263 lehrt, dass bei der wirklichen Ausführung der Projektion der Grundkreis T ein Kreis ist, dessen Halbmesser dem beliebig gewählten Radius der Sphäre gleichkommt. Man wählt die Projektionsebene hiebei immer so, dass der Grundkreis auch immer einer möglichen Zone des betrachteten Krystalles entspricht. Die Projektionsebene T muss daher senkrecht zu einer möglichen Zone, der Gesichtsstrahl OC des Zentrums der Sphäre aber parallel der Axe dieser Zone sein.

Nennen wir diejenige Hälfte der Sphäre, welche auf der entgegengesetzten Seite der Ebene T liegt, wie der Augpunkt C, die obere, die andere Hälfte aber die untere, so wird offenbar die Projektion jedes oberen Punktes der Sphäre innerhalb des Grundkreises T liegen, während die Projektionen der unteren Punkte ausserhalb dieses Kreises fallen. Man begnügt sich gewöhnlich, bloss die obere Hälfte der Sphäre zu projiziren und zieht es vor, wenn es sich um eine Projektion der ganzen Sphäre handelt, dieselbe in zwei Hälften zu projiziren, indem man das Auge abwechselnd in zwei entgegengesetzten Punkten eines Durchmessers der Sphäre versetzt denkt.

Kennt man die Projektionen P, Q, R dreier Punkte des Kreises Z der Sphäre, so kennt man auch die Projektion X dieses Kreises, X muss ja ebenfalls ein Kreis sein, und muss durch die drei Punkte P, Q, R gehen. Durch drei Punkte kann aber nur ein einziger Kreis gelegt werden, welcher daher eben die gesuchte Projektion X ist.

Der Mittelpunkt eines Kreises, der durch drei gegebene Punkte P, Q, R geht, ist bekanntlich der Durchschnittspunkt der drei Linien, welche in den Halbirungspunkten der Linien QR, RP, PQ auf diesen Linien senkrecht stehen.

Jeder grösste Kreis der Sphäre schneidet offenbar den Kreis T der Sphäre in zwei Punkten, die mit O in einer Geraden liegen. Die Lage dieser Punkte ändert sich aber bei der Projektion der Sphäre auf die Ebene T nicht, und wir können daher sagen: die Projektion jedes grössten Kreises schneidet den Grundkreis in den Endpunkten eines Durchmessers des letzteren Kreises.

Hieraus folgt sogleich, was jedoch auch unmittelbar klar ist, dass jeder durch den Augpunkt C gelegte grösste Kreis zur Projektion eine Gerade hat, die durch den Mittelpunkt des Grundkreises geht.

Mit Hilfe der vorhergehenden Bemerkung lässt sich aber sogleich auch die nachfolgende Aufgabe lösen.

1. Aufgabe. Aus der Projektion eines Punktes P der Sphäre die Projektion des entgegengesetzten Punktes P' derselben zu bestimmen, Fig. 264.

Wir setzen hiebei natürlich voraus, dass uns auch die Lage des Grundkreises T gegeben sei. So viel ist alsogleich klar, dass P' auf der Linie PO liegen muss; jeder grösste Kreis, der durch P geht, muss nämlich auch durch P' gehen, lassen wir nun den grössten Kreis durch den Augpunkt O gehen, so wird er in der Projektion eine gerade Linie, welche die Punkte P, O, P' enthalten muss. Legen wir aber irgend einen anderen grössten Kreis durch P und P', so wird derselbe in der Projektion ein Kreis K sein, der den Grundkreis in zwei Punkten A, B schneidet, so zwar, dass AOB eine Gerade ist. Einer bekannten Eigenschaft des Kreises (K) zufolge wird daher

$$P'O : AO = BO : PO$$

und

$$PO \,.\, P'O = AO \,.\, BO = r^2$$

sein, wenn r den Halbmesser des Grundkreises T bedeutet. Da uns aber die Längen von r und PO bekannt sind, so können wir aus der letzten Gleichung leicht die Länge $P'O$ bestimmen, wodurch dann P' vollkommen bestimmt ist. Wir brauchen nur in O eine Senkrechte zu PO zu errichten, welche T im Punkte D schneidet, in D aber eine Linie senkrecht zu PD zu ziehen und bis zu ihrem Durchschnittspunkte P mit der Linie OP zu verlängern. Es ist alsdann offenbar

$$PO \,.\, P'O = OD^2$$

und da OD ebenfalls gleich dem Halbmesser r ist, die so gefundene Länge von $P'O$ offenbar diejenige, welche der früheren Gleichung entspricht. Zur Konstruktion des rechten Winkels PDP' kann man sich der Eigenschaft des Kreises bedienen, dass der Winkel im Halbkreise gleich 90° ist, und erhält so als Lösung der gestellten Aufgabe die folgende Konstruktion.

Auflösung. Man errichte im Mittelpunkte O des Grundkreises T eine zur Linie OP senkrechte Linie. Von der letzteren werde der Kreis T in dem Punkte D getroffen, von der Linie PD aber im Punkte E, endlich von der Linie EO im Punkte F. Der Durchschnittspunkt der Linien PO und DF ist alsdann die gesuchte Projektion des entgegengesetzten Punktes von P.

Aus dem eben Gesagten ergibt sich aber auch alsogleich die Lösung der folgenden Aufgabe.

2. Aufgabe. Die Projektion des grössten Kreises zu zeichnen, wenn die Projektion zweier Punkte P, Q desselben gegeben ist.

Auflösung. Man bestimme für einen dieser Punkte, P etwa die Projektion des Punktes P', der dem ersteren auf der Sphäre entgegengesetzt ist. Der durch die drei Punkte P, Q, P' gelegte Kreis ist alsdann die gesuchte Projektion des grössten Kreises.

§. 84. Eigenschaften der Projektion des Poles eines grössten Kreises.

Schneiden sich, Fig. 265, auf einer Kugel zwei grösste Kreise T, Z, deren Pole der Augpunkt C und der beliebige Punkt P sein sollen, in dem Punkte A, und sind F und F' die Durchschnittspunkte dieser Kreise mit einem beliebigen, durch C und P gelegten Kreise der Kugel, so müssen offenbar die Bogen AF und AF' gleich gross sein, da die beiden grössten Kreise T und Z vollkommen symmetrisch mit Bezug auf den Kreis K sind.

Wählen wir nun T zur Projektionsebene und C zum Augpunkte, so wird die Projektion des Kreises K offenbar eine gerade Linie sein, welche durch den Pol des Kreises Z geht; die Gesichtsstrahlen aller Punkte des Kreises K liegen ja in einer und derselben Ebene. Da nun der Bogen AF' bei dieser Projektion nicht geändert wird, so leitet man aus diesen Betrachtungen leicht den folgenden allgemeinen Satz ab.

Lehrsatz. Sind A F G und P die Projektionen eines grössten Kreises und des Poles desselben, F' und G' aber die Durchschnittspunkte der Linien FP und GP mit dem Grundkreise, so gibt $F'G'$ die Grösse des Bogens, dessen Projektion FG ist, Fig. 266.

Dem Vorhergehenden zufolge ist nämlich, wenn A der Durchschnittspunkt des grössten Kreises FG mit dem Grundkreise ist, GA der Grösse nach die Projektion eines Winkels $G'A$, und FA die Projektion eines Winkels $F'A$. Durch Subtraktion ergibt sich hieraus offenbar, dass auch $F'G'$ gleich dem in FG projizirten Bogen ist. Um aber von diesem Satze Anwendungen machen zu können, haben wir offenbar erst noch die folgende Aufgabe zu lösen.

1. Aufgabe. Aus der gegebenen Projektion eines grössten Kreises die Projektion seines Poles zu finden, Fig. 266.

Schneidet der gegebene Kreis AFB den Grundkreis in den Punkten A, B, ein zu AB senkrechter Durchmesser des Grundkreises denselben aber in D und E, so wird der Pol des Kreises AFB offenbar in der Linie ED liegen müssen, soll derselbe in der That gleich weit von den gerade entgegengesetzten Punkten des Kreises AFB abstehen. Diess geht auch daraus hervor, dass dem vorhergehenden Satze zufolge die Linie EP durch den Halbirungspunkt Q des Bogens AFB gehen muss, da ja $EA = EB = 90^0$ ist. Zur vollständigen Bestimmung von P genügt jetzt der Umstand, dass die Entfernung der Punkte P und Q auf der Kugel 90^0 betragen muss. Da nun A offenbar der Pol des grössten Kreises POQ ist, so muss dem vorhergehenden Satze zufolge, wenn P' und Q' die Durchschnittspunkte des Grundkreises mit den Linien AP und AQ sind, der Bogen $P'Q'$ gleich 90^0 sein. Man hat somit, um P zu finden, nur die folgende Konstruktion auszuführen.

Auflösung. A und B seien die Durchschnittspunkte des um O beschriebenen Grundkreises mit dem gegebenen grössten Kreise, Q aber der Punkt des letzteren, für welchen

$$AQ = QB$$

ist. Q' sei der Durchschnittspunkt der Linie AQ mit dem Grundkreise, P' aber der Punkt desselben, für welchen

$$P'OQ' = 90^0$$

ist und der auf der entgegengesetzten Seite von AB wie der Punkt Q' liegt. Der Durchschnittspunkt P der Linien AP' und OQ ist alsdann der gesuchte Pol des gegebenen grössten Kreises.

2. Aufgabe. Aus der Projektion F, G zweier Punkte ihren Abstand auf der Sphäre anzugeben, Fig. 266.

Auflösung. Man suche den Pol P des durch F und G gehenden grössten Kreises; sind dann F' und G' die Punkte, in welchen der Grundkreis von den Linien PF und PG geschnitten wird, und O der

Mittelpunkt des Grundkreises, so gibt der Winkel $F'OG'$ den gesuchten Abstand der Punkte F und G auf der Sphäre.

3. Aufgabe. Auf der Projektion eines grössten Kreises den Punkt G anzugeben, der von dem Punkte F desselben Kreises um den Winkel φ auf der Sphäre entfernt ist, Fig. 265.

Auflösung. Man suche die Projektion des Poles P des gegebenen grössten Kreises; dis Linie PF schneide den um O beschriebenen Grundkreis in F', ferner sei G' ein Punkt des Grundkreises, für welchen

$$F'OG' = \varphi.$$

Der Durchschnittspunkt des gegebenen grössten Kreises mit der Linie $G'P$ ist dann der gesuchte Punkt G.

4. Aufgabe. Gegeben seien die Projektionen F, G zweier Punkte, es soll die Projektion H des Punktes gefunden werden, der von den zwei ersten auf der Sphäre beziehungsweise um die Winkel φ und ψ absteht.

Auflösung. Man lege durch F drei beliebige grösste Kreise, und bestimme auf denselben die Punkte a, b, c, welche von F um den Winkel φ abstehen; ebenso bestimme man sich drei Punkte a', b', c', die mit G den Winkel ψ bilden. Legt man nun durch a, b, c und a', b', c' Kreise, so ist deren Durchschnittspunkt offenbar der gesuchte Punkt H. Dieser muss ja der allgemeinen Eigenschaft der stereographischen Projektion zufolge auch auf der Kugel mit a, b, c und a', b', c' in einem Kreise liegen.

5. Aufgabe. Aus den Projektionen zweier grösster Kreise den Winkel zu finden, den die Ebenen dieser Kreise in Wirklichkeit miteinander bilden.

Der gesuchte Winkel ist offenbar gleich dem Abstande der beiden Pole dieser zwei grössten Kreise, und kann somit mit Hilfe der ersten und zweiten Aufgabe gefunden werden.

Entsprechen die beiden grössten Kreise möglichen Krystallzonen, so ist ihre Neigung offenbar gleich dem Winkel der entsprechenden Zonenaxen, welches ja die Richtungen möglicher Krystallkanten sind.

§. 85. Triklinisches System.

Der vorhergehende Paragraph gibt uns die Mittel an die Hand, mit Hilfe der Neigungswinkel der Flächen oder Kanten eines Krystalles eine Projektion der Pole dieser Flächen anzufertigen. Hiebei werden wir die Projektionsebene nicht senkrecht zu einer beliebigen Zone wählen, sondern dieselbe so bestimmen müssen, dass die Symmetrie-

verhältnisse des projizirten Krystalles möglichst deutlich hervortreten. Hieraus folgt auch, dass man Krystalle eines und desselben Systems auch immer auf eine Ebene senkrecht zu derselben Zone zu projiziren haben wird.

Man wählt daher die Projektionsebene:

im tesseralen, rhombischen und triklinischen Systeme senkrecht zu einer der Axenrichtungen, gewöhnlich senkrecht zur ZAxe, welches die Axe der Zone [(100) (010)] = [001] ist;

im tetragonalen Systeme senkrecht zur ZAxe;

im hexagonalen Systeme senkrecht zur morphologischen Axe, d. i. die Axe der Zone [111],

im monoklinischen Systeme endlich senkrecht zur YAxe, also senkrecht zur Zone [(100) (001)] = [010].

Da aber die Flächen eines Krystalles auch durch die Indices bestimmt sind, falls das Axensystem gegeben ist, so entsteht noch die Frage, wie man für ein bestimmtes Axensystem die Projektion des Poles einer durch ihre Indices gegebenen Fläche bestimmen kann. Wir wollen nun gleich den allgemeinen Fall betrachten und die Lösung des folgenden Problems suchen.

Aufgabe. Es soll für ein gegebenes triklinisches Axensystem die Projektion des Poles der Fläche (hkl) bestimmt werden, falls die Projektionsebene senkrecht zur ZAxe ist.

Es ist klar, dass in diesem Falle der Mittelpunkt Z des Grundkreises die Projektion des Punktes sein wird, in welchem die ZAxe die Sphäre trifft, Fig. 267, die Axenebenen XZ und YZ werden natürlich zwei durch Z gehende Gerade sein. Errichtet man zu diesen Geraden in Z zwei senkrechte Linien, welche den Grundkreis in U und V schneiden, so werden diese letzteren Punkte die Pole der zwei Axenebenen (100) und (010) sein müssen.

Es seien nun in Fig. 268 OM, ON, OP der Grösse und Richtung nach die Parameter der gegebenen Fläche, welche im Punkte E von der aus O auf sie gefällten Normale getroffen wird. F und G seien die Durchschnittspunkte der Linien MP und NP mit den in den betreffenden Axenebenen zu OP senkrechten Linien OF und OG; L sei der Durchschnittspunkt der Linien FG und EP. Denken wir uns um O die Sphäre beschrieben, so wird dieselbe die Linie OE in einem Punkte R, die Verlängerung der Linie OP aber in einem Punkte C treffen, so zwar, dass R der Pol der Fläche MNP, C aber der Augpunkt unserer Projektion sein wird. Ziehen wir nun die Linien OL und CR, so wird ihr Durchschnittspunkt S die Projektion von R vorstellen, da ja die

Ebene FOG, in welcher OS liegt, senkrecht zu OP ist, und uns somit die Projektionsebene vorstellt. Die Länge OS gibt uns die Entfernung des Poles der Fläche MNP in der Projektion vom Mittelpunkte des Grundkreises, SOF gibt uns aber den Winkel, welchen in der Projektion der grösste Kreis XZ mit dem grössten Kreise EZ bilden muss. Hiedurch ist aber die Lage des Poles von MNP vollkommen bestimmt. Der grösste Kreis EZ wird natürlich in der Projektion ebenfalls eine durch den Mittelpunkt des Grundkreises gehende Gerade sein. Der Winkel FOG ist aber offenbar derjenige, welchen in der Projektion die grössten Kreise XY und XZ mit einander bilden, also gleich $180^0 - UV$.

Wie man sieht, kommt es also, da OE senkrecht zu PL und OL senkrecht zu FG ist, nur darauf an, die Längen der Linien OF, OG, FG, OP wirklich zu ermitteln, um die Länge OS und den Winkel SOF hieraus bestimmen zu können. Diess geschieht aber nach den im 11. Kapitel eingeschlagenen Methoden auf folgende Weise:

A u f l ö s u n g. Sind ξ, η, ζ, a, b, c die Elemente des gegebenen Axensystems und r der Radius des Grundkreises, so mache man, Fig. 269

$$NOP = \xi \quad POM = \eta \quad MON_1 = \zeta$$

und mit einer beliebigen Längeneinheit

$$MO = \frac{a}{h} \quad NO = N_1O = \frac{b}{h} \, PO = \frac{c}{l}$$

bestimme ferner die Punkte F, G der Linien NP, MP, so dass

$$GOP = POF = 90^0$$

Man konstruire nun mit den Längen NP, PM, MN das Dreieck $M'N'P'$, Fig. 270, mache auf den Seiten $M'P'$ und $N'P'$ desselben

$$P'T' = PT \quad P'G' = PG$$

bestimme den Punkt O', für welchen

$$O'F' = OF, \; O'G' = OG$$

und nenne L' den Durchschnittspunkt der Linien $F'G'$ und $O'P'$.

Mit den Längen OP, $O'L'$, $P'L'$ konstruire man sich, Fig. 271, ein rechtwinkliges Dreieck $P''O''L''$, ziehe

$$O''R'' \perp P''L''$$

und mache auf dieser Linie und der Verlängerung von $O''P''$

$$OR'' = O''C'' = r$$

S'' sei schliesslich der Durchschnittspunkt der Linien $O''L''$ und $R''C''$.

Ist nun Z der Mittelpunkt des mit r als Halbmesser beschriebenen Grundkreises, Fig. 267, so werden die den Axenebenen XZ und

XY entsprechenden Radien desselben einen Winkel bilden, der gleich $F'O'G'$ ist. Bestimmt man aber den Punkt S in diesem Kreise, für welchen

$$SZX = L'O'F', \quad SZ = O''S''$$

ist, so gibt S die gesuchte Projektion des Poles der Fläche (hkl).

§. 86. Monoklinisches System.

Aufgabe. Es soll für ein monoklinisches Axensystem die Projektion des Poles (hkl) bestimmt werden, falls die Projektionsebene senkrecht zur YAxe ist.

In diesem Falle ist die Projektionsebene, Fig. 272, parallel der XZEbene, der Mittelpunkt des Grundkreises daher die Projektion nicht nur des Endpunktes der YAxe, sondern auch des Poles V der Axenebene (010). Jede durch diese Fläche gehende Zone wird daher in der Projektion als gerade Linie erscheinen. Die Endpunkte der X- und ZAxe, so wie die Pole U(100), W(001) werden aber in dem Grundkreise liegen, so zwar, dass $XU = ZW = 90^0$ und $XZ = 180^0 - UW$ ist. Es seien nun, Fig. 273, OM, ON, OP der Grösse und Richtung nach die Parameter der Fläche (hkl), welche im Punkte E von der aus O auf sie gefällten Normale getroffen wird; ferner R und C zwei solche Punkte der Linien OE und ON, so dass $OR = OC$ gleich dem Radius des Grundkreises ist. Ist nun L der Durchschnittspunkt der Linien NE und PM, S der der Linien RC und OL, so gibt die Länge OS in der Projektion die Entfernung des Poles der Fläche MNP von dem Mittelpunkte des Grundkreises, der Winkel POS aber den Winkel, welchen die den Zonenkreisen VZ und VS entsprechenden Geraden mit einander bilden; da OL senkrecht zu PM ist, so erhalten wir somit die folgende Konstruktion.

Auflösung. Sind a, b, c, η die Elemente des gegebenen Axensystems und r der Radius des Grundkreises, so mache man, Fig. 274

$$M_1ON = NOP = 90^0, \quad POM = \eta$$

$$MO = M_1O = \frac{a}{h}, \quad NO = \frac{b}{k}, \quad PO = \frac{c}{l}$$

suche den Punkt N, für welchen

$$MN_1 = NM_1, \quad PN_1 = PN$$

und nenne L den Durchschnittspunkt der Linien N_1O und MP. Man konstruire nun das rechtwinklige Dreieck $N'O'L'$, so dass Fig. 275

$$N'O' = NO, \; N'L' = N_1L, \; O'L' = OL$$

ziehe

$$O'R' \perp N'L'$$

und mache auf dieser Linie sowie auf der Verlängerung von $N'O'$

$$O'R' = O'C' = r$$

Ist nun S' der Durchschnitt von $C'R'$ und $L'O'$, so gibt uns S, Fig. 272, im Falle dass

$$VS = O'S', \quad ZVS = POL$$

ist, die gesuchte Projektion des Poles von (hkl). Der Durchschnittspunkt T des Grundkreises mit der Geraden VS ist natürlich der Pol der Fläche $(h0l)$.

§. 87. Rhombisches, tetragonales und tesserales System.

Aufgabe. Für ein rechtwinkliges Axensystem die Projektion der Fläche (hkl) zu finden, falls die Projektionsebene senkrecht zu einer der Axenrichtungen ist, Fig. 276.

In diesem Falle werden natürlich die Endpunkte der drei Axen mit den Polen der Axenebenen in der Projektionsebene zusammenfallen müssen. Wählen wir die Projektionsebene senkrecht zur ZAxe, so wird der Mittelpunkt W des Grundkreises der Pol von (001) sein; die Pole der Axenebenen (100) und (010) aber werden in dem Grundkreise selbst liegen, so zwar, dass UWV gleich 90^0 ist. Um nun die Projektion des Poles der Fläche (hkl) zu finden, hat man die nachfolgende Konstruktion auszuführen, deren Richtigkeit nach dem, was wir schon über diesen Gegenstand gesagt haben, wohl ohne Weiteres klar sein dürfte.

Auflösung. Sind a, b, c die Axenlängen, und ist W der Mittelpunkt des zur ZAxe senkrechten Grundkreises, in welchem die um 90^0 abstehenden Punkte U, V die Pole der Flächen (100) und (010) bedeuten, so mache man auf den Linien WU und WV mit einer beliebigen Längeneinheit

$$WM = \frac{a}{h}, \quad WN = \frac{b}{k}$$

und bestimme auf der Linie MN den Punkt L, für welchen

$$WL \perp MN$$

Durch W ziehe man eine Parallele mit MN, mache auf derselben mit der früheren Längeneinheit

$$WP = \frac{c}{l}$$

und nenne C den Durchschnittspunkt des Grundkreises mit der über W verlängerten Linie WP, vorausgesetzt, dass l positiv ist. Man suche nun den Punkt E der Linie PL, für welchen

$$WE \perp PL$$

und den Durchschnittspunkt R des Grundkreises mit der Linie WE; alsdann ist schliesslich der Durchschnittspunkt S der Linien WL und CR die gesuchte Projektion des Poles (hkl).

Der Durchschnittspunkt T des Grundkreises mit der Linie WL ist offenbar der Pol der Fläche $(hk0)$. Ueberhaupt kann man für ein rechtwinkliges Axensystem die Lage des Poles (hkl) auch dadurch zweckmässig bestimmen, dass man sich ausser dem Pole $T(hk0)$ noch etwa den Pol $Q(h0k)$ sucht, welcher in der Linie UW liegen muss. S ist alsdann der Kreuzungspunkt der zwei grössten Kreise WT und VQ.

§. 88. Hexagonales System.

Im hexagonalen Systeme wählen wir, wie schon erwähnt, den basischen Hauptschnitt zur Projektionsebene, so dass also der Mittelpunkt des Grundkreises, Fig. 277, dem Pole (111) entspricht. Sechs unter Winkeln von 30° durch diesen Pol gezogenen Geraden geben dann die Projektion der primären und sekundären Hauptzonenkreise, deren Durchschnitte mit dem basischen Hauptschnitte die Pole der Flächen $(2\bar{1}\bar{1})$, $(10\bar{1})$... sind (§. 27). Die Endpunkte X, Y, Z der drei Axen, sowie auch die Pole U, V, W der Axenebenen werden aber in diesen Hauptzonenkreisen, und zwar zwischen dem Pole (111) und den Polen $(2\bar{1}\bar{1})$, $(\bar{1}2\bar{1})$, $(\bar{1}\bar{1}2)$ liegen müssen.

Da uns die Lage der Pole einer Anzahl Flächen also von vornherein gegeben ist, so können wir zweckmässig die Projektion des Poles einer beliebigen Fläche (hkl) dadurch bestimmen, dass wir die Durchschnitte etwa der Zonenkreise $[(hkl)(\bar{1}2\bar{1})]$ und $[(hkl)(\bar{1}\bar{1}2)]$ mit dem Zonenkreise $[(111)(2\bar{1}\bar{1})]$ suchen. Die Durchschnittspunkte werden die Pole von Flächen sein, deren Symbole von der Form (mpp) sind, und wir werden daher vor Allem die nachfolgende Aufgabe zu lösen haben.

1. Aufgabe. Die Projektion des Poles der Fläche (mpp) zu bestimmen.

Dieser Pol wird natürlich in dem Zonenkreise $[(111)(2\bar{1}\bar{1})]$ liegen müssen, kann sich aber darin entweder rechts oder links vom Pole (111) befinden. Es seien in Fig. 278 OM, OP, OP_1 der Grösse und Richtung nach die drei Parameter der Fläche (mpp), ferner N ein Punkt auf der Linie OM, so dass $OP = ON$ ist. NPP_1 stellt uns

alsdann die Fläche (111) vor, welche von der aus O auf sie gefällten Normale im Punkte T getroffen werden soll. Ist nun L der Durchschnittspunkt der Linien NT und PP_1, E aber der Durchschnitt der Linie ML mit der von O auf sie gefällten Senkrechten, so ist, wenn die um O beschriebene Sphäre die Linie OE im Punkte R trifft, dieser Punkt offenbar der Pol der Fläche MPP_1. Machen wir daher auf der entgegengesetzten Hälfte von OT das Stück OC gleich OR, so gibt uns der Durchschnittspunkt S der Linie RC mit einer durch O parallel NT gezogenen Linie die gesuchte Projektion des Poles der Fläche MPP_1. Diess zeigt uns also, dass wir zur Lösung der gestellten Aufgabe die nachfolgenden Operationen auszuführen haben.

Auflösung. Ist ξ der gegebene Axenwinkel und r der Radius des Grundkreises, so mache man mit der beliebigen Längeneinheit λ, Fig. 279

$$POP_1 = \xi, \quad PO = P_1O = \frac{1}{p}\lambda,$$

bestimme den Punkt N, für welchen

$$NP = NP_1 = PP_1$$

und nenne L den Durchschnittspunkt der Linien PP_1 und NO. Mit den Längen LO, LN, OP konstruire man sich nun das Dreieck $L'N'O'$, so zwar, dass, Fig. 280

$$L'O' = LO, \quad L'N' = LN, \quad N'O' = PO$$

und bestimme auf den Seiten $O'N'$, $N'L'$ die Punkte M und T, für welche

$$O'M = \frac{1}{m}\lambda, \quad O'T \perp L'N'.$$

E sei ferner ein Punkt der Linie $L'M$, so dass

$$O'E \perp L'M$$

R und C Punkte auf $O'E$ und auf der Verlängerung $O'T$, für welche

$$O'R = O'C = r$$

und S ein Punkt der Linie RC, für welchen

$$SO' \parallel L'N'$$

ist. Macht man nun in dem mit r als Halbmesser gezogenen Grundkreise, Fig. 277, auf der Linie (111) ($2\bar{1}\bar{1}$) das Stück

$$(111)\,(mpp) = O'S$$

so gibt der so bestimmte Punkt die richtige Projektion des Poles der Fläche (mpp), wenn wir nur $O'S$ mit ($2\bar{1}\bar{1}$) entweder auf derselben

oder auf der entgegengesetzten Seite von (m) auftragen, je nachdem in Fig. 280 die Punkfe M und E auf derselben Seite von $O'T$ liegen oder nicht.

Es ist klar, dass durch diese Konstruktion auch die Projektion der Pole (pmp) und (ppm) gegeben ist, welche ja gleichweit mit (mpp) von (111) abstehen, aber in den Zonen $[(\bar{1}21)(111)]$ und $[(\bar{1}\bar{1}2)(111)]$ liegen.

Will man die Lage des Poles der Axenebene YZ bestimmen, so hat man statt (mpp) nur (100) oder $(\infty 11)$ zu setzen. Dadurch fällt in der vorhergehenden Konstruktion der Punkt M mit O' zusammen und $O'E$ wird senkrecht zu $L'O'$.

2. **Aufgabe.** Die Projektion des Poles der beliebigen Fläche (hkl) zu bestimmen.

Auflösung. Man berechne sich mit Hilfe der Zonenregel die Symbole der beiden Flächen (mpp) und $(m'p'p')$, welche in der Zone $[(111)(2\bar{1}\bar{1})] = [0\bar{1}1]$ und beziehungsweise in den Zonen $[(hkl)(11\bar{2})]$ und $[(hkl)(\bar{1}2\bar{1})]$ liegen; hierauf suche man nach der vorhergehenden Konstruktion für diese zwei Flächen die Projektion ihrer Pole, und lege einerseits durch die Pole $(11\bar{2})$ und (mpp), andererseits durch $(\bar{1}2\bar{1})$ und $(m'p'p')$ einen grössten Kreis. Der Durchschnittspunkt dieser zwei Kreise ist dann die gesuchte Projektion des Poles (hkl).

3. **Aufgabe.** Die Projektion des Poles einer Fläche (hkl) zu bestimmen, wenn $h + k + l = 0$ ist.

In diesem Falle muss der Pol der Fläche (hkl) offenbar in den Grundkreis selbst fallen, und die vorhergehende Methode ist nicht mehr anwendbar. Man kann sich aber leicht ähnlich, wie folgt, helfen.

Auflösung. Man berechne die Indices der Fläche (mpp), welche in der Zone $[(111)(2\bar{1}\bar{1})]$ und etwa in der Zone $[(001)(hkl)]$ liegt, bestimme hierauf die Projektion des Poles dieser Fläche, und lege durch den so gefundenen Pol von (mpp) und durch (001) einen grössten Kreis. Der Durchschnittspunkt dieses grössten Kreises mit dem Grundkreise gibt dann die gesuchte Projektion des Poles (hkl).

13. Kapitel.

Rechnungsformeln.

§. 89. Berechnung unbekannter Krystallwinkel aus bekannten.

Die Kapitel I—X erschöpfen die Aufgabe der Krystallographie insoferne, als es sich um die Erkenntnis der Gesetze handelt, welche die Gestalten der Krystalle beherrschen. Wir haben dabei gesehen, dass, trozdem die Neigungen der Flächen zu einander gewissen Beschränkungen unterworfen sind, eine grosse Mannigfaltigkeit von Krystallgestalten möglich ist, die sich theils durch ihre Symmetrieverhältnisse, theils bloss durch die Werthe ihrer Elemente unterscheiden. Und wirklich treffen wir in der Natur diese Mannigfaltigkeit an, indem fast jede krystallisirende chemische Verbindung andere Abmessungen zeigt. Da also die Krystallgestalt zur Charakterisirung der chemischen Verbindung beiträgt, ist es von Interesse, die Konstanten der verschiedenen Krystalle zu ermitteln, nicht nur indem man dadurch die Identität eines Körpers sicherer feststellt, sondern auch in der Hoffnung, schliesslich doch Beziehungen zwischen der Gestalt und der chemischen Zusammensetzung oder den übrigen physikalischen Eigenschaften der Krystalle aufzufinden.

Die Indices und Elemente eines Krystalles lassen sich ersichtlich durch direkte Messung nicht ermitteln. Da dieselbe jedoch, wie wir gesehen, die Lage der Flächen des Krystalles zu einander bestimmen, so sieht man, dass es wenigstens auf dem Wege der Rechnung möglich sein muss, aus den Abmessungen der geometrischen Form des Krystalles die Indices und Elemente zu ermitteln.

Es lassen sich aber besonders die Neigungswinkel der Flächen eines Krystalles mit Genauigkeit durch die Beobachtung ermitteln,

daher man auch immer aus solchen Messungen die Flächenindices und Elemente eines Krystalles berechnet. Nur wenn die Neigungswinkel der Flächen eines Krystalles nicht gemessen werden können, nimmt man seine Zuflucht zu den ebenen Winkeln der Flächen, zu den Winkeln also, welche Kanten mit einander bilden, die denselben Flächen angehören. Als äusserstes Mittel könnte man auch die Längen der Kanten bestimmen, um daraus die ebenen Winkel und schliesslich die Elemente und Flächenindices zu berechnen.

Im Einklange mit dem eben Gesagten werden wir die nachfolgenden Probleme nur für die Neigungswinkel der Flächen lösen. Hiebei werden wir die Flächen immer durch ihre Pole und die Kanten durch die Endpunkte derselben auf der Sphäre der Projektion repräsentiren. Sind etwa, Fig. 281, E und F die Pole zweier Flächen, so gibt uns der Bogen EF des durch diese Pole gelegten grössten Kreises der Sphäre das Supplement des inneren Neigungswinkels der betrachteten Flächen, d. i. ihren Normalenwinkel, den wir auch immer verstehen wollen, wenn wir im Nachfolgenden kurz von dem Winkel zweier Flächen sprechen. Der Pol U des durch E und F gelegten grössten Kreises ist aber offenbar der Endpunkt der Kante dieser beiden Flächen, falls dieselbe durch den Mittelpunkt der Sphäre gezogen wird. Um daher, falls die Pole E und F gegeben sind, den Endpunkt der Kante dieser beiden Flächen zu finden, hat man nur den Punkt U zu suchen, der von E und F um 90° absteht.

Sind U, V, W die Pole dreier Flächen, Fig. 281, so wird man die Endpunkte ihrer Kanten nach dem Gesagten dadurch finden, dass man die Pole X, Y, Z der Zonenkreise VW, WU, UV bestimmt. Da alsdann

$$VX = WX = WY = UY = UZ = VZ = 90^\circ$$

ist, so werden auch umgekehrt U, V, W die Pole der Zonenkreise YZ, ZX, XY sein. Betrachten wir den ersten dieser Zonenkreise, so sehen wir, dass derselbe die Kreise UW und VW in zwei Punkten E und F schneidet, für welche

$$EF = 180^\circ - XY$$

ist, da ja die Winkel FX und EY gleich 90° sein müssen. Natürlich sind auch EU und FU gleich rechten Winkeln, und daher EF auch derjenige Bogen, den man unter dem Winkel U des sphärischen Dreieckes UVW versteht; die Bogen VW, WU, UV bezeichnet man aber als die Seiten dieses Dreieckes. Demzufolge kann man also sagen:

„In dem durch die Pole dreier Flächen gegebenen sphärischen Dreiecke sind die Seiten gleich den Normalenwinkeln dieser Flächen, die Winkel aber gleich den Supplementen der Kantenwinkel.“

Da wir schon im Paragraphe 5 gezeigt haben, dass jeder Satz, der sich auf die Kanten- und Normalenwinkel dreier Ebenen bezieht, auch noch richtig bleibt, wenn man diese Winkel gegenseitig mit einander vertauscht, so können wir sogleich auch sagen:

„In dem durch die Endpunkte der Kanten dreier Flächen bestimmten sphärischen Dreiecke sind die Seiten gleich den Kantenwinkeln, die Winkel aber gleich den Supplementen der Normalenwinkel der drei Flächen.“

Zwischen den trigonometrischen Funktionen der Seiten und Winkel eines sphärischen Dreieckes, oder was dasselbe, zwischen diesen Funktionen der Kanten- und Normalenwinkel dreier Flächen werden aber offenbar gewisse Relationen bestehen, welche es unter anderen auch möglich machen müssen, aus drei dieser Grössen die übrigen drei zu berechnen. Es lehrt uns ja schon die geometrische Anschauung, dass die Lage der drei Flächen im Allgemeinen durch drei Stücke gegeben ist. Ausgenommen bleiben freilich gewisse spezielle Fälle, in welchen die Kenntnis dreier Stücke noch nicht hinreicht, die übrigen Stücke unzweifelhaft zu bestimmen.

Diese Relationen zwischen den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreieckes bilden den Gegenstand der sphärischen Trigonometrie, und zu ihrer Ableitung könnte man etwa die im §. 72 gegebene Konstruktion benützen, welche aus den drei Kantenwinkeln dreier Ebenen den Normalenwinkel zwischen irgend zwei dieser Ebenen finden lehrt. Mit Hilfe der Formeln der ebenen Trigonometrie erhält man nämlich aus dieser Konstruktion eine Gleichung zwischen den drei Kantenwinkeln und dem Supplemente eines Normalenwinkels, d. i. zwischen den drei Seiten und einem Winkel des sphärischen Dreieckes. Aus dieser Gleichung lassen sich dann sämmtliche übrige Formeln der sphärischen Trigonometrie ableiten *).

Mit Hilfe dieser Formeln wird man auch immer aus den drei Kantenwinkeln dreier Flächen ihre Normalenwinkel berechnen können und umgekehrt. Hiedurch kann man ersichtlich sogleich auch die Kantenwinkel zur Berechnung der Krystalle verwerthen, obwohl die betreffenden Probleme im Nachfolgenden nur für Normalenwinkel gelöst sind.

*) Wir verweisen in Betreff dieser Formeln und ihrer Ableitung unter Anderem auf die Erläuterungen zu den Logarithmen-Tafeln von E. F. August, Leipzig 1865, welche letztere sich überhaupt für den praktischen Gebrauch empfehlen dürften.

§. 90. Aufgaben der Krystallberechnung.

Die Hauptaufgaben, welche wir in diesem Kapitel zu lösen haben, sind:

1. die Berechnung der Normalenwinkel der Flächen aus den Elementen und Indices dieser Flächen;

2. die Ermittelung der Flächensymbole aus den Winkeln, die diese Flächen mit bekannten Flächen bilden, falls die Elemente des Krystalles gegeben sind;

3. die Berechnung der Elemente eines Krystalles aus gegebenen Winkeln.

Die Lösung der zwei ersten Aufgaben ist immer möglich; wir werden diese Aufgaben später dadurch lösen, dass wir sie auf die folgenden Probleme zurückführen:

„Aus den Indices einer Fläche und den Elementen die Position des Poles dieser Fläche zu finden. Umgekehrt aber die Indices einer Fläche zu bestimmen, falls die Elemente und die Position ihres Poles gegeben sind."

Sind nämlich T und M zwei gegebene Punkte auf der Sphäre der Projektion, so ist die Lage irgend eines Punktes P bestimmt, sobald man die Bogen PT und PM kennt. Man kann aber die Lage des Punktes P auch dadurch bestimmen, dass man nebst dem Bogen TP noch den Winkel angibt, welchen die beiden grössten Kreise TM und TP mit einander bilden; hiedurch ist ja ersichtlich der Punkt P ebenfalls seiner Lage nach vollkommen bestimmt, sobald wir noch wissen, nach welcher Richtung der Winkel MTP als positiv zu zählen ist. Die Grössen TP und MTP nennen wir nun die Position des Punktes P mit Bezug auf den Punkt T und den grössten Kreis TM. Wir werden T und TM natürlich so wählen, dass die Berechnung der Position eines Punktes sich möglichst einfach stellt. Es erweist sich hiebei als zweckmässig, für T den Pol einer möglichen Fläche des Krystalles und ebenso für TM den Kreis einer möglichen Zone zu benützen. Da aber für die einzelnen Krystallsysteme eine verschiedene Wahl der Fläche T und der Zone TM sich als zweckmässig herausstellt, so wollen wir die Lösung des allgemeinen Problems auf spätere Paragraphe vertheilen, wo für jedes einzelne System gezeigt werden soll, wie man für eine gewisse Fläche T und Zone TM die Position des Poles der Fläche P finden könne, deren Indices nebst den Elementen gegeben sind.

Es wird sich aber zeigen, dass auch die Lösung des umgekehrten Problems immer möglich ist, d. h. dass wir, falls die Elemente eines

Krystalles bekannt sind, immer aus der Position des Poles einer Fläche die Indices der letzteren ermitteln können.

Was die letzte der erwähnten drei Aufgaben betrifft, so würde dieselbe, da ja zur Bestimmung von fünf Grössen auch fünf Beobachtungen nothwendig sind, für triklinische Krystalle in ihrer allgemeinsten Form also lauten:

„Gegeben seien fünf Winkel eines Krystalles und die Symbole der zehn Flächen, welche zu zweien diese Winkel bilden, es sollen die Elemente des betreffenden Krystalles ermittelt werden.“

Sind die Elemente des Krystalles etwa a, b, c, ξ, η, ζ, die Symbole zweier Flächen desselben (hkl) und $(h'k'l')$, so hat man für die Tangente des Winkels δ, welchen diese beiden Flächen mit einander bilden, den Ausdruck

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{1}{K}\sqrt{(\sin\xi^2 + \sin\eta^2 + \sin\zeta^2 + 2\cos\xi\cos\eta\cos\zeta - 1)\,L}$$

wobei

$$\begin{aligned} L = {} & \left(\frac{kl' - lk'}{bc}\right)^2 + \left(\frac{lh' - hl'}{ca}\right)^2 + \left(\frac{hk' - kh'}{ab}\right)^2 + \\ & + 2\left(\frac{lh'-hl'}{ca}\right)\left(\frac{hk'-kh'}{ab}\right)\cos\xi + 2\left(\frac{hk'-kh'}{ab}\right)\left(\frac{kl'-lk'}{bc}\right)\cos\eta + \\ & + 2\left(\frac{kl'-lk'}{bc}\right)\left(\frac{lh'-hl'}{ca}\right)\cos\zeta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K = {} & \frac{hh'}{a^2}\sin\xi^2 + \frac{kk'}{b^2}\sin\eta^2 + \frac{ll'}{c^2}\sin\zeta^2 + \frac{kl'+lk'}{bc}(\cos\eta\cos\zeta - \cos\xi) + \\ & + \frac{lh'+hl'}{ca}(\cos\zeta\cos\xi - \cos\eta) + \frac{hk'+kh'}{ab}(\cos\xi\cos\eta - \cos\zeta) \end{aligned}$$

Die Auflösung der vorhergehenden Aufgabe würde also darin bestehen, aus fünf solchen Gleichungen, von welchen für jedes δ, h, k, l, h', k', l' andere Werthe haben, die Grössen $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$ zu ermitteln. Diess ist jedoch im Allgemeinen nicht möglich, und könnte für gegebene Zahlenwerthe der Grössen δ, h, k .... höchstens durch Näherungsmethoden ausgeführt werden, indem man für versuchsweise angenommene Werthe der Elemente sieht, ob die berechneten Werthe der Winkel δ mit den gegebenen übereinstimmen.

Die Auflösung der gestellten Aufgabe gelingt vielmehr nur für gewisse spezielle Fälle der fünf Winkel, welche Fälle im Nachfolgenden bei den Rechnungsformeln des triklinischen Systems angeführt sind. Kann man aber solche fünf Winkel aus den gegebenen fünf ableiten, so

ist natürlich auch in diesem Falle die Auflösung unserer Aufgabe möglich. Zur Ableitung eines Winkels aus schon bekannten gibt es aber zwei Hilfsmittel. Fallen nämlich erstens von den Flächen, welche die bekannten Winkel bilden, einzelne zusammen, so werden wir in den von den Polen dieser Flächen gebildeten Dreiecken durch Anwendung der Formeln der sphärischen Trigonometrie bisweilen die Grösse unbekannter Seiten bestimmen können. Sind aber zweitens unter den gegebenen Winkeln solche, die derselben Zone angehören, so wird man auch von der Beziehung, welche zwischen den Winkeln und Symbolen von vier tautozonalen Flächen stattfindet, Gebrauch machen können, um die Werthe eines Winkels hieraus zu finden.

Für die Krystalle der übrigen Systeme vereinfacht sich die Berechnung der Elemente desto mehr, je weniger unbekannte Grössen die Elemente eigentlich vorstellen; so gelingt es für hexagonale und tetragonale Krystalle, in welchen von den Elementen nur ein Stück unbestimmt ist, den Werth desselben aus jedem beliebigen Winkel zu ermitteln.

§. 91. Gleichungen für die Winkel einer Krystallfläche mit den Axenrichtungen.

Es seien OH, OK, OL der Grösse und Richtung nach die Parameter der Fläche (hkl), welche im Punkte E von der aus O auf sie gefällten Senkrechten getroffen wird, Fig. 282. X, Y, Z und P seien ferner die Punkte, in welchen eine um O beschriebene Kugel (d. i. die Sphäre der Projektion) die Axenrichtungen und die Linie OE schneidet, P also der Pol der Fläche (hkl). Da nun die Dreiecke HOE, KOE, LOE rechtwinklig sind, so ist

$$OE = OH \cos PX = OK \cos PY = OL \cos PZ$$

und daher auch

$$\frac{a}{h} \cos PX = \frac{b}{k} \cos PY = \frac{c}{l} \cos PZ$$

Auf diesen Gleichungen, welche uns eine Beziehung zwischen den Elementen, Indices und gewissen Winkeln einer Fläche geben, beruht die ganze Berechnung der Krystalle. Die Winkel PX, PY, PZ, welche die Neigungen der Fläche (hkl) zu den Axenrichtungen sind, lassen sich aber im Allgemeinen nicht direkt durch Beobachtung ermitteln. Nur in den Systemen mit rechtwinkligen Axen sind die Axenrichtungen zugleich auch senkrecht zu den Axenebenen, daher die Winkel PX, PY, PZ wirkliche Normalenwinkel, welche durch Be-

obachtung bestimmt werden können, und so eine unmittelbare Anwendung der obigen Gleichung gestatten; für die anderen Systeme bleibt also vorzüglich die Aufgabe zu lösen übrig, wie man aus Normalenwinkeln der Fläche P ihre Neigungen zu den Axenrichtungen berechnen könne.

§. 92. Bedingung für tautozonale Flächen.

Es seien X, Y, Z die Endpunkte der Axenrichtungen, P, P' die Pole der Flächen (hkl) und $(h'k'l')$, Q aber ein beliebiger Punkt des Zonenkreises PP', in welchem die Winkel QP und QP' nach einer und derselben Richtung gezählt sein sollen, Fig. 283. Aus den sphärischen Dreiecken PQX und $P'QX$ findet man alsdann

$$\cos PX = \cos QX \cos QP + \sin QX \sin QP \cos XQP$$
$$\cos P'X = \cos QX \cos QP' + \sin QX \sin Q'P' \cos XQP'$$

und hieraus, indem man die erste Gleichung mit sin QP', die zweite mit sin QP multiplizirt und subtrahirt

$$\cos PX \sin QP' - \cos P'X \sin QP = \cos QX (\cos QP \sin QP' - \\ - \cos Q'P \sin QP) + \sin QX \sin QP \sin QP' (\cos XQP - \cos XQP')$$

Nun ist aber, wenn QP, QP', PP' nach derselben Richtung gezählt sind, wo auch immer der Punkt Q mit Bezug auf P und P' liegen mag,

$$PP' = PQ + QP' = - QP + QP'$$
$$XQP = XQP'$$

und daher

$$\sin QP' \cos QP - \cos QP' \sin QP = \sin (QP' - QP) = \sin PP'$$
$$\cos XQP - \cos XQP' = 0$$

Demzufolge geht die letzte Gleichung in die erste der nachstehenden über, deren zwei letzte sich auf ähnliche Weise ableiten lassen

$$\left.\begin{aligned} \cos PX \sin QP' - \cos P'X \sin QP = \cos QX \sin PP' \\ \cos PY \sin QP' - \cos P'Y \sin QP = \cos QY \sin PP' \\ \cos PZ \sin QP' - \cos P'Z \sin QP = \cos QZ \sin PP' \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen die Brüche $\frac{\sin QP'}{\sin PP'}$ und $\frac{\sin QP}{\sin PP'}$, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} (\cos PY \cos P'Z - \cos PZ \cos P'Y) + \\ + (\cos PZ \cos P'X - \cos PX \cos P'Z) + \\ + (\cos PX \cos P'Y - \cos PY \cos P'X) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2)$$

Sind ferner a, b, c die Elemente des Krystalles, dem die Flächen P und P' angehören, so ist dem vorhergehenden Paragraphe zufolge

$$(3) \ldots \quad \begin{array}{l} \frac{a}{h}\cos PX = \frac{b}{k}\cos PY = \frac{c}{l}\cos PZ \\ \frac{a}{h'}\cos P'X = \frac{b}{k'}\cos P'Y = \frac{c}{l'}\cos P'Z \end{array}$$

wodurch die Gleichung (2) in die folgende übergeht

$$(4) \ldots \quad \mathrm{u}a \cos QX + \mathrm{v}b \cos QY + \mathrm{w}c \cos QZ = 0$$

wenn zur Abkürzung

$$(5) \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} \mathrm{u} = kl' - lk' \\ \mathrm{v} = lh' - hl' \\ \mathrm{w} = hk' - kh' \end{cases}$$

gesetzt wird. Die Gleichung (4) muss also, da Q einen beliebigen Punkt der Zone PP' vorstellt, durch jeden Punkt dieser Zone erfüllt werden. Ist Q ebenfalls eine Fläche, (efg) etwa, so hat man auch

$$(6) \ldots \quad \frac{a}{e}\cos QX = \frac{b}{f}\cos QY = \frac{c}{g}\cos QZ$$

demzufolge die Gleichung wird

$$(7) \ldots\ldots\ldots \quad e\mathrm{u} + f\mathrm{v} + g\mathrm{w} = 0;$$

ob also drei Flächen in einer Zone liegen, hängt bloss von ihren Indices ab, welche in diesem Falle der Gleichung (7) genügen müssen.

Die Grössen u, v, w heissen die Indices der Zone PP'; sind u′, v′, w′ die entsprechenden Grössen, berechnet aus zwei anderen Flächen S und S' derselben Zone PP', so muss

$$(8) \ldots\ldots\ldots \quad \frac{\mathrm{u}}{\mathrm{u}'} = \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{v}'} = \frac{\mathrm{w}}{\mathrm{w}'}$$

sein, da ja die Gleichung (7) auch richtig bleiben muss, wenn man u, v, w durch u′, v′, w′ ersetzt. Den gemeinsamen Werth der Brüche (8) bezeichnen wir aber durch das Symbol

$$\left[\frac{PP'}{SS'}\right] = \left[\frac{hkl,\ h'k'l'}{S \quad S'}\right] = \left[\frac{\mathrm{u},\ \mathrm{v},\ \mathrm{w}}{\mathrm{u}',\ \mathrm{v}',\ \mathrm{w}'}\right]$$

und es ist leicht einzusehen, dass

$$(9) \ldots \quad \left[\frac{PP'}{SS'}\right] = -\left[\frac{P'P}{S'S}\right] = -\left[\frac{PP'}{S'S}\right] = 1 : \left[\frac{SS'}{PP'}\right]$$

sein muss.

Mit Hilfe der Gleichung (7) überzeugt man sich leicht, dass, wenn die Fläche $Q(efg)$ in zwei Zonen liegt, deren Symbole etwa [uvw] und [rst] sind, für die Indices dieser Fläche folgende Gleichungen gelten:

$$\left.\begin{aligned} p &= \mathrm{sw} - \mathrm{tu} \\ q &= \mathrm{tu} - \mathrm{rw} \\ r &= \mathrm{rv} - \mathrm{su} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

§. 93. Beziehung zwischen den Neigungen und Symbolen von vier tautozonalen Flächen.

Eliminirt man aus der zweiten und dritten Gleichung (2) des vorhergehenden Paragraphes die Grösse $\sin PP'$, so wird mit Rücksicht auf die Gleichungen (3) und (6)

$$\frac{\sin QP}{\sin QP'} = \frac{\cos PY \cos QZ - \cos PZ \cos QY}{\cos P'Y \cos QZ - \cos P'Z \cos QY}$$

$$= \frac{ek - fh}{ek' - fh'} \cdot \frac{h' \cos PX}{h \cos P'X}$$

welche Gleichung wir symbolisch auch so schreiben können:

$$\frac{\sin QP}{\sin QP'} = \left[\frac{QP}{QP'}\right] \cdot \frac{h' \cos PX}{h \cos P'X} \quad \ldots\ldots (11)$$

Ist R der Pol einer vierten Fläche (uvw) der Zone PP', so haben wir hiefür natürlich die ähnliche Gleichung

$$\frac{\sin RP}{\sin RP'} = \left[\frac{RP}{RP'}\right] \cdot \frac{h' \cos PX}{h \cos P'X} \quad \ldots\ldots (12)$$

Die Division der zwei letzten Gleichungen gibt aber

$$\frac{\sin QP}{\sin QP'} : \frac{\sin RP}{\sin RP'} = \left[\frac{QP}{QP'}\right] : \left[\frac{RP}{RP'}\right] \ldots (13)$$

welche Gleichung uns das anharmonische Verhältnis der Flächen Q und R zu den Flächen P und P' mit Hilfe der Indices dieser vier tautozonalen Flächen finden lehrt. In dieser Gleichung müssen die Winkel QP und QP' andererseits RP und RP' nach derselben Richtung gerechnet sein. Zählen wir die Winkel alle von P aus nach derselben Richtung, so können wir die letzte Gleichung auch so schreiben:

$$\frac{\sin PQ . \sin (PR - PP')}{\sin (PQ - PP') \sin PR} = \left[\frac{QP}{QP'}\right] \cdot \left[\frac{RP'}{RP}\right] \quad \ldots (14)$$

Setzt man

$$\left[\frac{QP}{QP'}\right]\left[\frac{RP'}{RP}\right] \cdot \frac{\sin (PQ - PP')}{\sin PQ} = \tan \delta \quad \ldots (15)$$

so gibt die vorhergehende Gleichung

$$\tan \delta = \frac{\sin (PR - PP')}{\sin PR}$$

woraus man leicht

$$1 + \tan \delta = \frac{\sin PR + \sin(PR - PP')}{\sin PR} = \frac{2 \sin(PR - \frac{1}{2} PP') \cos \frac{1}{2} PP'}{\sin PR}$$

$$1 - \tan \delta = \frac{\sin PR - \sin(PR - PP')}{\sin PR} = \frac{2 \cos(PR - \frac{1}{2} PP') \sin \frac{1}{2} PP'}{\sin PR}$$

ableitet. Die Division der zwei letzten Gleichungen gibt aber

$$\tan (45^0 + \delta) = \frac{1 + \tan \delta}{1 - \tan \delta} = \frac{\tan (PR - \frac{1}{2} PP')}{\tan \frac{1}{2} PP'}$$

oder

$$(16) \ldots \tan (PR - \tfrac{1}{2} PP') = \tan \tfrac{1}{2} PP' \,.\, \tan (45^0 + \delta)$$

Setzt man aber

$$(17) \ldots \left[\frac{QP}{QP'}\right] \frac{\sin (PQ - PP')}{\sin (PR - PP')} \cdot \frac{\sin PR}{\sin PQ} = n$$

so erhält man aus Gleichung (14)

$$n = \left[\frac{RP}{RP'}\right] = \frac{vl - wk}{vl' - wk'} = \frac{wh - ul}{wh' - ul'} = \frac{uk - vh}{uk' - vh'}$$

und hieraus schliesslich

$$(18) \ldots \frac{u}{w} = \frac{h - h'n}{l - l'n}, \quad \frac{v}{w} = \frac{k - k'n}{l - l'n}$$

Die Gleichungen (16) und (18) geben aber die Lösung der folgenden zwei Probleme:

1. Aufgabe. Aus den Indices von vier tautozonalen Flächen und den Winkeln zwischen drei derselben den Abstand der vierten Fläche zu bestimmen.

Auflösung. Sind die Symbole der vier Flächen

$$P(hkl), \quad P'(h'k'l'), \quad Q(efg), \quad R(uvw)$$

und sind

$$PP', \quad PQ, \quad PR = ?$$

die nach derselben Richtung gezählten Normalenwinkel dieser Flächen, so berechne man sich zuerst den Winkel δ aus der folgenden Gleichung

$$\tan \delta = \left[\frac{QP}{QP'}\right] \left[\frac{RP'}{RP}\right] \frac{\sin (PQ - PP')}{\sin PQ}$$

der Werth von PR ergibt sich alsdann aus der Gleichung

$$\tan (PR - \tfrac{1}{2} PP') = \tan \tfrac{1}{2} PP' \tan (45^0 + \delta).$$

2. Aufgabe. Aus den Winkeln, welche vier tautozonale Flächen unter einander bilden und aus den Indices dreier dieser Flächen die Indices der vierten zu finden.

Auflösung. Sind die Symbole der vier tautozonalen Flächen

$$P(hkl), \quad P'(h'k'l'), \quad Q(efg), \quad R(?)$$

und

$$PP', \quad PQ, \quad PR$$

die nach derselben Richtung gezählten Normalenwinkel dieser Flächen, so suche man für n eine rationale Zahl, welche die Gleichung

$$n = \left[\frac{QP}{QP'}\right] \frac{\sin(PQ - PP')}{\sin(PR - PP')} \cdot \frac{\sin PR}{\sin PQ}$$

möglichst genau erfüllt. Die Indices u, v, w der Fläche R sind alsdann gegeben durch die Gleichungen

$$u = \pm (h - h'n)$$
$$v = \pm (k - k'n)$$
$$w = \pm (l - l'n)$$

wo der Lage der gegebenen Flächen entsprechend entweder die oberen oder unteren Zeichen zu nehmen sind.

§. 94. Aenderung des Axensystems.

Es seien P_1, P_2, P_3 die Durchschnittspunkte der Zonen $[u_1v_1w_1]$, $[u_2v_2w_2]$, $[u_3v_3w_3]$, Q und R aber die Pole der Flächen (pqr) und (efg), man soll die Werthe p_0, q_0, r_0 der Indices von P angeben, falls man zu Axenrichtungen die Axen der Zonen P_2P_3, P_3P_1, P_1P_2, zu Axenlängen aber die Abschnitte der Fläche R wählt, Fig. 284.

Zu diesem Zwecke ziehen wir den Zonenkreis QR, welcher die Kreise P_1P_3 und P_2P_3 in zwei Punkten S und S' trifft, welches die Pole möglicher Flächen sein müssen, und deren Symbole sich leicht aus den gegebenen Grössen bestimmen lassen. So finden wir für die Indices h, k, l und h', k', l' der Flächen S und S' mit Bezug auf das ursprüngliche Axensystem

$$h = (gp - er)w_2 + (fp - eg)v_2, \quad h' = (gp - er)w_1 + (fp - eg)v_1$$
$$k = (eq - fp)u_2 + (gq - fr)w_2, \quad k' = (eq - fp)u_1 + (gq - fr)w_1$$
$$l = (fr - gq)v_2 + (er - gp)u_2, \quad l' = (fr - gq)v_1 + (er - gp)u_1$$

Für das Axensystem, dessen Richtungen durch die Zonenaxen P_2P_3, P_3P_1 und P_1P_2, dessen Längen aber durch R gegeben sind, hat man offenbar für diese Flächen die Symbole

$$P_1(100), \quad P_2(010), \quad P_3(001), \quad R(111).$$

Nennt man daher die Indices der Flächen S und S' mit Bezug auf dieses Axensystem $h_0, k_0 \ldots$ so hat man, da die Indices der Fläche Q jetzt p_0, q_0, r_0 sind

$$\begin{aligned} h_0 &= p_0 - q_0 & h_0' &= 0 \\ k_0 &= 0 & k_0' &= q_0 - p_0 \\ l_0 &= r_0 - q_0 & l_0' &= r_0 - p_0 \end{aligned}$$

Da nun das anharmonische Verhältnis der vier tautozonalen Flächen R, Q, S, S' immer dasselbe sein muss, welches Axensystem man auch der Berechnung dieses Verhältnisses zu Grunde legt, so muss dem vorhergehenden Paragraphe zufolge

$$\left[\frac{pqr,\ hkl}{pqr,\ h'k'l'}\right]\left[\frac{efg,\ h'k'l'}{efg,\ hkl}\right] = \left[\frac{p_0q_0r_0,\ h_0k_0l_0}{p_0q_0r_0,\ h'_0k'_0l'_0}\right]\left[\frac{111,\ h_0k_0l_0}{111,\ h'_0k'_0l'_0}\right]$$

sein. Die Ausführung der durch diese Symbole angedeuteten Operationen gibt aber

$$\frac{pu_2 + qv_2 + rw_2}{pu_1 + qv_1 + rw_1} \cdot \frac{eu_1 + fv_1 + gw_1}{eu_2 + fv_2 + gw_2} = \frac{q_0}{p_0}$$

Auf gleiche Weise würde man aber auch mit Hilfe der Flächen S und S'', wo S'' in den beiden Zonen $[PQ]$ und $[P_1P_2]$ liegt, die nachfolgende Gleichung erhalten:

$$\frac{pu_3 + qv_3 + rw_3}{pu_1 + qv_1 + rw_1} \cdot \frac{eu_1 + fv_1 + gw_1}{eu_2 + fv_2 + gw_2} = \frac{r_0}{p_0}$$

Aus diesen Gleichungen folgt nun, wenn wir für p_0 den nachfolgenden rationalen Werth annehmen:

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{pu_1 + qv_1 + rw_1}{eu_1 + fv_1 + gw_1} \\ q_0 &= \frac{pu_2 + qv_2 + rw_2}{eu_2 + fv_2 + gw_2} \\ r_0 &= \frac{pu_3 + qv_2 + rw_3}{eu_3 + fv_3 + gw_3} \end{aligned}$$

durch welche Ausdrücke die gestellte Aufgabe gelöst ist.

§. 95. Gleichungen für die Winkel einer Krystallkante mit den Axenrichtungen.

Es seien, Fig. 285, X, Y, Z die Endpunkte der Axenrichtungen und S der Pol des Zonenkreises $[uvw]$. Ist ferner P der Pol des grössten Kreises SX, also die Seite PS und der Winkel PSX gleich 90^0, so hat man in den sphärischen Dreiecken PSX und PSZ

$$\cos PY = \sin SY \cos PSY = \sin SY \cos (XSY - PSX) =$$
$$= \sin SY \cos (XSY - 90^0) = \sin SY \sin XSY,$$
$$\cos PZ = \sin SZ \cos PSZ = \sin SZ \cos (360^0 - PSX - ZSX) =$$
$$= \sin SZ \cos (270^0 - ZSX) = - \sin SZ \sin ZSX.$$

Da aber P um 90^0 von S absteht, so muss P ein Punkt des Zonenkreises [uvw] sein, und dem §. 91 zufolge mit Rücksicht darauf, dass $PX = 90^0$ ist, der nachstehenden Gleichung genügen:

$$vb \cos PY + wc \cos PZ = 0$$

Setzt man in diese Gleichung für cos PY und cos PZ die früher gefundenen Werthe, so erhält man

$$vb \frac{\sin SY}{\sin ZSX} = wc \frac{\sin SZ}{\sin XSY}$$

Auf die nämliche Weise würde aber die Betrachtung des Poles des grössten Kreises SY die folgende Gleichung geben:

$$wc \frac{\sin SZ}{\sin XSY} = ua \frac{\sin SX}{\sin YSZ}$$

welche mit der früheren vereinigt die Doppelgleichung

$$ua \frac{\sin SX}{\sin YSZ} = vb \frac{\sin SY}{\sin ZSX} = wc \frac{\sin SZ}{\sin XSY} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

gibt. Drücken wir in dieser Gleichung und in der ebenfalls richtigen Gleichung

$$YSZ + ZSX + XSY = 360^0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

diese Winkel durch die Axenwinkel und die Winkel SX, SY, SZ aus, was ja mit Hilfe der sphärischen Dreiecke leicht möglich ist, so geben uns die Gleichungen (1) und (2) drei Gleichungen zwischen den Winkeln, welche eine Kante mit den Axenrichtungen bildet und zwischen ihren Indices und den Elementen. Man kann daher aus diesen Gleichungen auch die Winkel SX, SY, SZ mit Hilfe der Indices und Elemente bestimmen; zur Berechnung des Verhältnisses der Indices oder der Axenlängen genügt natürlich schon die Gleichung (1).

Konstruirt man sich ein Parallelopiped, Fig. 286, dessen eine Diagonale mit OS und dessen drei Kanten OH, OK, OL mit den Axenrichtungen zusammenfallen, so hat man, wenn OG die Durchschnittslinie der Ebenen LOS und KOH, N aber der Kreuzungspunkt der Kreise ZS und XY ist, offenbar

$$HOG = NX, \quad KOG = NY$$

Hiernach erhält man leicht mit Berücksichtigung der Gleichungen (1)

$$\frac{OK}{OH}=\frac{\sin HOG}{\sin KOG}=\frac{\sin NX}{\sin NY}=\frac{\sin NX}{\sin NS}\cdot\frac{\sin NS}{\sin NY}$$
$$=\frac{\sin NSX}{\sin SXY}\cdot\frac{\sin SYX}{\sin NSY}=\frac{\sin NSX}{\sin NSY}\cdot\frac{\sin SYX}{\sin SXY}$$
$$=\frac{\sin ZSX}{\sin YSZ}\cdot\frac{\sin SX}{\sin SY}=\frac{\mathrm{v}b}{\mathrm{u}a}$$

und auf ähnliche Weise

$$\frac{OL}{OH}=\frac{\mathrm{w}c}{\mathrm{u}a}$$

Wir können somit, wenn T einen konstanten Faktor bedeutet, setzen

$$OH=T.\mathrm{u}a,\quad OK=T.\mathrm{v}b,\quad OL=T.\mathrm{w}c$$

welche Gleichungen uns auf eine einfache Weise die Richtung einer Kante mit Hilfe ihrer Indices für ein gegebenes Axensystem konstruiren lehren.

§. 96. Tesserales System.

Da in diesem Systeme die Axenwinkel lauter rechte sind, so müssen die Endpunkte X, Y, Z der Axenrichtungen zugleich auch die Pole der grössten Kreise YZ, ZX, XY sein, d. h. sie müssen mit den Polen U, V, W der Axenebenen zusammenfallen, Fig. 287. In dem sphärischen Dreiecke UVW werden daher sowohl die Seiten als die Winkel rechte sein. In Betreff der Axenlängen haben wir $a=b=c$.

Ist P irgend ein Punkt der Sphäre, so findet man aus den sphärischen Dreiecken UPW, VPW

$$\cos UP=\sin WP\cos UWP$$
$$\cos VP=\sin WP\cos PWV=\sin WP\sin UWP$$

und durch Quadriren und Addiren dieser Gleichungen

$$\cos UP^2+\cos VP^2=\sin WP^2$$

Diese Gleichung kann aber auch auf folgende Art geschrieben werden:

$$\cos UP^2+\cos VP^2+\cos WP^2=1$$

$$(1)\ldots\begin{cases}\cos UP^2=-\cos(VP+WP)\cos(VP-WP)\\ \cos VP^2=-\cos(WP+UP)\cos(WP-UP)\\ \cos WP^2=-\cos(UP+VP)\cos(UP-VP)\end{cases}$$

Ist aber P der Pol einer Fläche (hkl), so muss dem §. 91 zufolge

$$\frac{1}{h}\cos UP = \frac{1}{k}\cos VP = \frac{1}{l}\cos WP \quad .\ .\ .\ .\ (2)$$

sein, woraus man durch Substitution der Eingangs gefundenen Werthe von $\cos UP$ und $\cos VP$ einerseits

$$\left.\begin{aligned}\frac{h}{l} &= \tan WP \cos UWP\\ \frac{h}{k} &= \cot UWP\end{aligned}\right\} \quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (3)$$

andererseits aber

$$\left.\begin{aligned}\cot WP &= \frac{l}{\sqrt{h^2+k^2}}\\ \tan UWP &= \frac{k}{h}\end{aligned}\right\} \quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (4)$$

erhält. Aus der ersten Gleichung (4) findet man aber mit Berücksichtigung der Gleichungen (2) leicht

$$\left.\begin{aligned}\cos UP &= \frac{h}{\sqrt{h^2+k^2+l^2}}\\ \cos VP &= \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2+l^2}}\\ \cos WP &= \frac{l}{\sqrt{h^2+k^2+l^2}}\end{aligned}\right\} \quad .\ .\ .\ .\ .\ (5)$$

Ist ferner P' irgend ein anderer Punkt der Sphäre, Fig. 287, so findet man nach den für sphärische Dreiecke geltenden Formeln

$$\cos PP' = \cos WP \cos WP' + \sin WP \sin WP' \cos PWP'$$
$$\cos PWP' = \cos (UWP - UWP') =$$
$$= \cos UWP \cos UWP' + \sin UWP \sin UWP'$$
$$\sin UP = \sin WP \cos UWP \quad \sin UP' = \sin WP' \sin UWP'$$
$$\sin VP = \sin WP \sin UWP \quad \sin VP' = \sin WP' \sin UWP'$$

aus welchen Gleichungen durch Elimination

$$\cos PP' = \cos UP \cos UP' + \cos VP \cos VP' + \cos WP \cos WP'$$

folgt. Ist nun P' ebenfalls der Pol einer Fläche, etwa von $(h'k'l')$, so können wir in der letzten Gleichung alle Cosinusse rechter Hand mit Hilfe der Gleichungen (5) durch die Indices ausdrücken und erhalten so

$$\cos PP' = \frac{hh' + kk' + ll'}{\sqrt{h^2+k^2+l^2}\ \sqrt{h'^2+k'^2+l'^2}}$$

Bestimmung der Position des Poles einer Fläche $P(hkl)$. Diese Aufgabe wird durch die Gleichungen (4) gelöst. Der Winkel UWP ist immer nach derselben Richtung von UW aus zu zählen, und zwar rechnet man denselben gewöhnlich in der Richtung von U nach V als positiv.

Ist P ein Punkt der Zone UV, so ist $WP = 90^0$ und $UWP = UP$; liegt P in UW, so ist $UWP = 0$, liegt P aber in der Zone VW, so ist $UWP = 90^0$.

Bestimmung des Normalenwinkels der beiden Flächen $P(hkl)$ **und** $P'(h'k'l')$. Der Werth dieses Winkels ergibt sich aus Gleichung (6); ist P' eine der Axenebenen, so kann man auch gleich die betreffende der Gleichungen (5) zur Berechnung des gesuchten Winkels anwenden.

Bestimmung der Indices einer Fläche $P(hkl)$. Wir unterscheiden hiebei folgende Fälle:

A) Ist die Position des Poles der Fläche P gegeben, so enthalten die Gleichungen (3) unmittelbar die Lösung der Aufgabe.

B) Sind die Winkel bekannt, welche die Fläche P mit zwei der Axenebenen bildet, so berechne man sich mit diesen Winkeln aus der betreffenden Gleichung (1) den Winkel, welchen die Fläche P mit der dritten Axenebene einschliesst; aus den Gleichungen (2) erhält man dann leicht die gesuchten Indices.

C) Sind die Winkel PF und PF' gegeben, welche P mit den zwei bekannten Flächen F und F' bildet, oder aber

D) ist uns nur ein solcher Winkel PF gegeben, dafür jedoch das Symbol [uvw] einer Zone bekannt, die durch P geht, so haben wir zur Lösung der gestellten Aufgabe die im §. 103 mitgetheilte allgemeine Methode einzuschlagen. Es sind dort für den gegenwärtigen Fall statt A, B, C die Buchstaben U, V, W zu setzen, wobei W der Pol des Zonenkreises UV ist.

§. 97. Hexagonales System.

In diesem Systeme hat man, wenn X, Y, Z die Endpunkte der Axenrichtungen sind, Fig. 288,

$$a = b = c$$
$$YZ = ZX = XY = \xi;$$

ist daher T der Pol der Fläche (111), so muss dem §. 91 zufolge

$$\cos TX = \cos TY = \cos TZ$$

und also

$$TX = TY = TZ$$

sein. In Folge dessen werden die um T liegenden Winkel der Dreiecke YTZ, ZTX, XTY gleich gross, und zwar gleich 120° sein müssen. Da jedes dieser Dreiecke gleichschenklig ist, so findet man z. B. aus XTY, da $\sin 60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ist

$$\sin TX = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{\xi}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

für den Fall irgend einer anderen Fläche (hkl) hat man

$$\frac{1}{h} \cos PX = \frac{1}{k} \cos PY = \frac{1}{l} \cos PZ$$

fällt aber der Pol in den grössten Kreis TX, so wird offenbar $PY = PZ$ und daher auch $k = l$. Der Pol der Fläche $R(pqq)$ liegt also in dem Kreise TX und es ist

$$\frac{1}{p} \cos PX = \frac{1}{q} \cos RY$$

Nun findet man aber aus dem sphärischen Dreiecke RYT leicht

$$\begin{aligned} \cos RY &= \cos TY \cos TR + \sin TY \sin TR \cos 120^0 \\ &= \cos TX \cos TR - \tfrac{1}{2} \sin TX \sin TR \end{aligned}$$

welche Gleichung in Verbindung mit der vorhergehenden, da RX gleich $TR - TX$ ist

$$\tan TR = 2 \frac{p - q}{p + 2q} \cot TX \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

gibt. In dieser Gleichung sind aber die Winkel TR und TX von T aus nach derselben Richtung zu zählen.

Ist M der Punkt des Kreises TX, der von T um 90° absteht, so wird der linke Theil der letzten Gleichung unendlich; damit diess nun auch der rechte Theil werde, muss $p + 2q = 0$ sein; M ist also der Pol der Fläche $M(2\bar{1}\bar{1})$. Wie schon aus der Symmetrie hervorgeht, wird der Punkt M', der im Zonenkreise TY um 90° von T absteht, der Pol der Fläche $M'(\bar{1}2\bar{1})$ sein; das Symbol der Zone MM' ist demzufolge [111].

Betrachten wir nun eine Fläche $N(rst)$, deren Pol in dem Zonenkreise MM' liegt; so haben wir für denselben die Gleichungen

$$\begin{aligned} &r + s + t = 0 \\ &\frac{1}{r} \cos NX = \frac{1}{s} \cos NY = \frac{1}{t} \cos NZ \end{aligned}$$

Aus den sphärischen Dreiecken MXN und $M'YN$, in welchen die Winkel XMN und $YM'N$ offenbar rechte sind, erhalten wir aber

$$\cos NX = \cos MX \cos MN = \sin TX \cos MN$$
$$\cos NY = \cos M'Y \cos M'N = \sin TX \cos (120^0 - MN) =$$
$$= -\tfrac{1}{2} \sin TX \cos MN + \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \sin TX \sin MN.$$

Substituirt man nun diese zwei Ausdrücke in die vorhergehende Gleichung, so wird mit Rücksicht darauf, dass $r + s + t = 0$

$$(3) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \tan MN = \frac{2s + r}{r\sqrt{3}} = \frac{s - t}{r\sqrt{3}}$$

Ist G der Pol einer Fläche, die im Zonenkreise MM' um 90^0 von M absteht, so muss, da $\tan 90^0 = \infty$, der Gleichung (3) zufolge auch $r = 0$ sein. G ist daher der Pol der Fläche $(01\bar{1})$, aber auch der Pol des Zonenkreises TX, da ja $GM = GT = 90^0$ ist. Der Durchschnittspunkt P der Zonenkreise GR und TN ist der Pol einer möglichen Fläche, deren Symbol etwa (hkl) sein soll. Für diesen Punkt P haben wir aber, da das Dreieck PRT offenbar ein rechtwinkliges ist

$$\tan TR = \tan TP \cos MTP$$

und

$$MTP = MN$$

Es muss also den Gleichungen (2) und (3) zufolge

$$\tan TP . \tan TX . \cos MTP = 2 \frac{p - q}{p + 2q}$$

$$\tan MTP = \frac{s - t}{r\sqrt{3}}$$

sein; in diesen Gleichungen können wir aber statt p, q, r, s, t leicht die Indices der Fläche P einführen. Es muss nämlich der Zonenregel zufolge sein

$$h = p (2r - s - t)$$
$$k = p (s - t) + 2q (r - s)$$
$$l = p (t - s) + 2q (r - t)$$

und somit, da $r + s + t = 0$ ist

$$\frac{k + l}{h} = \frac{2q (2r - s - t)}{p (2r - s - t)} = 2 \frac{p}{q}$$

$$\frac{k - l}{2h - k - l} = \frac{2 (p - q) (s - t)}{2 (p - q) (2r - s - t)} = \frac{s - t}{3r}$$

sein. Diese Werthe in die früheren Gleichungen substituirt geben

$$\left.\begin{aligned} \tan TP \tan TX \cos MTP &= \frac{2h - k - l}{h + k + l} \\ \tan MTP &= \frac{(k - l)\sqrt{3}}{2h - k - l} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (4)$$

Multiplizirt man diese Gleichungen mit einander, so geben sie

$$\tan TP \tan TX \sin MTP = \frac{(k - l)\sqrt{3}}{h + k + l}$$

Quadrirt und addirt man nun diese Gleichung und die erste Gleichung (4), so wird

$$\tan TP^2 \tan TX^2 = \frac{(2h + k - l)^2 + 3(k - l)^2}{(h + k + l)^2}$$

Für den Pol P hat man schliesslich die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \tan TP &= \frac{\sqrt{2}\sqrt{(k-l)^2 + (l-k)^2 + (h-k)^2}}{h + k + l} \cot TX \\ \tan MTP &= \frac{(k - l)\sqrt{3}}{2h - k - l} \end{aligned}\right\} \quad . (5)$$

Ist P der Pol der beliebigen Fläche $P(hkl)$, Q aber der Pol einer Fläche $Q(mnp)$, welche in der Zone $MM' = [111]$ liegt, so erhält man aus dem Dreiecke PQT, in welchem QT gleich $90°$ ist, Fig. 289,

$$\cos PQ = \sin TP \cos QWP = \sin TP \cos (MTP - MTQ)$$

Nun findet man aus den vorhergehenden Gleichungen leicht

$$\cos MTP = \frac{2h - k - l}{\sqrt{2}\sqrt{(k - l)^2 + (l - h)^2 + h - k)^2}}$$

$$\sin MTP = \frac{(k - l)\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sqrt{(k - l)^2 + (l - k)^2 + (h - k)^2}}$$

Es muss daher auch mit Berücksichtigung des Umstandes, dass $m + n + p = 0$

$$\cos MTQ = \frac{3m}{\sqrt{2}\sqrt{(n - p)^2 + (p - m)^2 + (m - n)^2}}$$

$$\sin MTQ = \frac{(n - p)\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sqrt{(n - p)^2 + (p - m)^2 + (m - n)^2}}$$

sein. Setzt man nun diese Werthe in die frühere Gleichung für $\cos PQ$, so erhält man nach geeigneter Reduktion

$$\cos PQ = \frac{3(hm + kn + lp)\sin TP}{\sqrt{(k-l)^2 + (l-h)^2 + (h-k)^2}\sqrt{(n-p)^2 + (p-m)^2 + (m-n)^2}} \quad . (6)$$

Es seien $P(hkl)$ und $P'(h'k'l')$ zwei Flächen, von denen keine in dem Zonenkreise MM' liegt; für die Indices der Zone PP' hat man

$$\mathrm{u} = kl' - lk', \quad \mathrm{v} = lh' - hl', \quad \mathrm{w} = hk' - kh'$$

und für die Fläche, deren Pol Q der Durchschnittspunkt der Zonenkreise PP' und MM' ist, das Symbol $Q(\mathrm{v} - \mathrm{w},\ \mathrm{w} - \mathrm{u},\ \mathrm{u} - \mathrm{v})$. Der Gleichung (5) zufolge wird aber sein

$$\tan MQ = \frac{\mathrm{v} + \mathrm{w} - 2\mathrm{u}}{(\mathrm{v} - \mathrm{w})\sqrt{3}}$$

Ist nun Q' der Punkt des Zonenkreises MM', der von Q um 90^0 absteht, so werden wir zur Bestimmung der Indices x, y, z der Ebene, deren Pol Q' ist, die folgenden Gleichungen haben:

$$x + y + z = 0$$

$$\frac{y - z}{x\sqrt{3}} = \tan Q'M = \tan (QM + 90^0) = -\cot MQ$$

$$= \frac{(\mathrm{w} - \mathrm{v})\sqrt{3}}{\mathrm{v} + \mathrm{w} - 2\mathrm{u}}$$

Hieraus findet man aber für Q' das Symbol

$$Q'(\mathrm{v} + \mathrm{w} - 2\mathrm{u},\quad \mathrm{w} + \mathrm{u} - 2\mathrm{v},\quad \mathrm{u} + \mathrm{v} - 2\mathrm{w}).$$

Q' ist also eine mögliche Fläche in Uebereinstimmung damit, dass hexagonale Krystalle nach jeder Fläche parallel, der morphologischen Axe isoschematisch sind. Nennen wir nun S den Durchschnittspunkt der Zonenkreise PP' und $Q'T$, so können wir mit Hilfe der Zonenregel leicht das Symbol der Fläche S ermitteln und erhalten so

$$S(\mathrm{uv} + \mathrm{uw} - \mathrm{v}^2 - \mathrm{w}^2,\ \mathrm{vw} + \mathrm{vu} - \mathrm{w}^2 - \mathrm{u}^2,\ \mathrm{wu} + \mathrm{wv} - \mathrm{u}^2 - \mathrm{v}^2)$$

Für die vier tautozonalen Flächen P, P', Q, S muss aber dem §. 93 zufolge die folgende Gleichung bestehen:

$$\frac{\sin QP \sin SP'}{\sin QP' \sin SP} = \left[\frac{QP}{QP'}\right]\left[\frac{SP'}{SP}\right]$$

Da aber der Bogen SQ offenbar gleich 90^0 ist, so hat man

$$\left[\frac{QP}{QP'}\right]\left[\frac{SP}{SP'}\right] = \frac{\sin QP \cos QP'}{\sin QP' \cos QP} = \frac{\tan QP}{\tan (QP + PP')}$$

und wenn wir die im linken Theile dieser Gleichung angedeuteten Operationen wirklich ausführen

$$\tan (QP + PP') =$$

$$= \frac{\left\{\begin{array}{l}(hh' + kk' + ll')(h + k + l)(h' + k' + l') - \\ \qquad - (h' + k' + l')^2 (h^2 + k^2 + l^2)\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{l}(hh' + kk' + ll')(h + k + l)(h' + k' + l') - \\ \qquad - (h + k + l)^2 (h'^2 + k'^2 + l'^2)\end{array}\right\}} \tan QP$$

Addirt und subtrahirt man von dieser Gleichung

$$\tan QP = \tan QP$$

und dividirt die so erhaltenen zwei neuen Gleichungen durch einander, so wird

$$\sin(2QP + PP') =$$

$$= \frac{\left\{\begin{matrix} 2(hh' + kk' + ll')(h + k + l)(h' + k' + l') - \\ -(h+k+l)^2(h'^2+k'^2+l'^2) - (h'+k'+l')^2(h^2+k^2+l^2) \end{matrix}\right\}}{(h+k+l)^2(h'^2+k'^2+l'^2) - (h'+k'+l')(h^2+k^2+l^2)} \sin PP' \,. \quad (8)$$

Bestimmung der Position des Poles einer Fläche $P(hkl)$. Da wir in diesem Systeme die Lage eines Poles P durch den Bogen $TP = (111)(hkl)$ und den Winkel $MTP = (2\bar{1}\bar{1})(111)(hkl)$ bestimmen, so geben uns die Gleichungen (1) und (5) die Lösung dieser Aufgabe, falls der Axenwinkel ξ gegeben ist. Der Winkel MTP ist von MT aus immer nach derselben Richtung zu zählen, und zwar rechnet man die positiven Winkel in der Richtung von $M(2\bar{1}\bar{1})$ nach $M'(\bar{1}2\bar{1})$.

Ist P eine Fläche der Zone TM, so können wir auch die spezielle Formel (2) benützen, wenn aber P in die Zone MM' entfällt die Formel (3). In dem letzten Falle brauchen wir den Axenwinkel ξ nicht zu kennen.

Bestimmung des Normalenwinkels zweier Flächen, wenn die Indices der letzteren und der Axenwinkel ξ gegeben sind. Nach der Lage der zwei Flächen unterscheiden wir hier folgende Fälle:

A) Ist der Winkel zweier Flächen $N(rst)$ und $N'(r's't')$ zu bestimmen, welche in der Zone $MM' = [111]$ liegen, so berechne man sich aus Gleichung (3) die Grössen MN und MN' und hat dann einfach $NN' = MN' \sim MN$, wo das Zeichen $\sim$ bedeutet, dass das Kleinere vom Grösseren abzuziehen ist. Hiezu ist also die Kenntnis des Axenwinkels ξ nicht nothwendig.

B) Um den Winkel zweier Flächen $P(hkl)$ und $P(h'k'l')$ zu finden, welche mit der Fläche (111) in einer Zone liegen, berechne man sich aus Gleichung (1) und (5) die Grössen TP und TP'; es ist dann $PP' = TP' \sim TP$.

C) Liegt von den zwei Flächen $P(hkl)$ und $Q(mnp)$ die zweite in der Zone $MM' = [111]$, so gibt die Gleichung (6) den gesuchten Werth des Winkels PQ, wenn man zuvor die Grösse TP mit Hilfe der Gleichungen (1) und (5) bestimmt.

D) Um allgemein den Winkel zweier Flächen, $P(hkl)$ und $P'(h'k'l')$ zu finden, von denen keine in der Zone MM' liegt, könnte man die Gleichung (7) benützen; die unbekannte Grösse PQ dieser Gleichung ergibt sich nämlich aus Gleichung (6), da Q den Durchschnittspunkt der Zonen PP' und MM' bedeutet. Liegt P' zwischen P und Q, so wird der Werth von PP' aus Gleichung (7) negativ. Der Gleichförmigkeit der Rechnung wegen dürfte sich jedoch die nachfolgende Methode zur Berechnung des Winkels PP' empfehlen.

Man bestimme sich mit Hilfe der Gleichungen (1) und (5) die Grössen TP und TP', ferner die Indices der Fläche $Q(mnp)$, welche in den beiden Zonen PP' und $MM' = [111]$ liegt; die Gleichung (6) gibt alsdann die Winkel QP und QP', und man hat schliesslich nur $PP' = QP' \sim QP$ zu machen.

Bestimmung der Indices einer Fläche, wenn der Axenwinkel ξ bekannt ist. Natürlich müssen zur Bestimmung der Indices einer Fläche zwei Daten gegeben sein, wobei wir die folgenden Unterscheidungen machen wollen.

A) Die Indices einer Fläche $P(hkl)$, deren Position durch die Grössen TP und MTP bekannt ist, ergeben sich mit Rücksicht auf Gleichung (1) aus den Gleichungen (4), deren vollständige Auflösung nach $\frac{h}{l}$ und $\frac{k}{l}$ keine Schwierigkeit darbietet. Da aber diesen Gleichungen zufolge die Ausdrücke $\tan TP \,.\, \tan TX \,.\, \cos MTP$ und $\frac{1}{\sqrt{3}} \tan MTP$ rational sein müssen, so wird man für dieselben nicht unmittelbar die durch Beobachtung oder durch Rechnung aus anderen beobachteten Grössen ermittelten Werthe zur weiteren Berechnung von $\frac{h}{l}$ und $\frac{k}{l}$ verwenden, sondern diejenigen nicht allzu hohen rationalen Zahlen benützen, welche diesen Werthen am nächsten kommen.

B) Sind die Winkel PF und PF' gegeben, welche die Fläche $P(hkl)$ mit den zwei bekannten Flächen F und F' bildet, oder aber

C) ist uns nur ein solcher Winkel, PF etwa, gegeben, dafür aber das Symbol [u, v, w] einer Zone bekannt, die durch P geht, so haben wir zur Lösung der gestellten Aufgabe die im §. 103 angegebene allgemeine Methode einzuschlagen, woselbst die Buchstaben T, M, M' dieselbe Bedeutung haben, in der sie in diesem Paragraphe gebraucht sind, also die Pole (111), $(21\bar{1})$, $(\bar{1}2\bar{1})$ bedeuten.

Bestimmung des Axenwinkels ξ aus dem Winkel zweier Flächen, deren Indices gegeben sind. Liegen die zwei

Flächen in der Zone MM', so ist die Lösung dieser Aufgabe hieraus nicht möglich, da ja die Winkel dieser Zone sämmtlich von ξ unabhängig sind; die Lösung ist vielmehr nur in folgenden Fällen möglich:

A) Ist der Winkel TP der Flächen $P(hkl)$ und $T(111)$ gegeben, so erhält man ξ, indem man aus der ersten Gleichung (5) die Grösse TX berechnet und in die Gleichung (1) substituirt.

B) Ist der Winkel PQ der Flächen $P(hkl)$ und $Q(mnp)$ gegeben, wo Q in der Zone $MM' = [111]$ liegt, so gibt die Gleichung (6) den Werth von TP und die Gleichungen (5) und (1) wie früher den Winkel ξ.

C) Um aber aus dem Winkel PP' der Flächen (hkl) und $P'(h'k'l')$ von denen keine in der Zone $MM' = [111]$ liegt, den Axenwinkel zu finden, bestimme man die Indices der Fläche $Q(mnp)$, deren Pol derjenige Durchschnittspunkt der zwei Zonenkreise PP' und MM' ist, der auf derselben Seite von P' liegt wie P, für welchen also der Ausdruck $\left[\frac{P'Q}{P'P}\right]$ positiv ist. Hat man alsdann aus Gleichung (8) den Werth von QP berechnet, so geben die Gleichungen (6), (5) und (1) successive TP, TX und ξ.

§. 98. Tetragonales System.

Sowie im tesseralen Systeme sind auch im tetragonalen die Pole U, V, W der Axenebenen, Fig. 290, zugleich die Endpunkte der Axenrichtungen, und in dem Dreiecke UVW, daher sowohl die Seiten als auch die Winkel gleich 90^0. Von den Axenlängen ist $b = a$.

Wir werden dem Gesagten zufolge ebenso wie im tesseralen Systeme für jeden Punkt P der Sphäre die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \cos UP^2 &= -\cos(VP + WP)\cos(VP - WP) \\ \cos VP^2 &= -\cos(WP + UP)\cos(WP - UP) \\ \cos WP^2 &= -\cos(UP + VP)\cos(UP - VP) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

haben. Ist aber P der Pol einer Fläche (hkl), so muss

$$\frac{a}{h}\cos UP = \frac{a}{k}\cos VP = \frac{c}{l}\cos WP \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

sein. Aus den Dreiecken PUW und PVW erhält man leicht

$$\cos UP = \sin WP \cos UWP$$
$$\cos VP = \sin WP \sin UWP$$

welche Werthe in die Gleichungen (2) substituirt die neuen Gleichungen

$$(3) \ldots\ldots \begin{cases} \dfrac{h}{l} = \dfrac{a}{c} \tan WP \cos UWP \\ \dfrac{h}{k} = \cot UWP \end{cases}$$

andererseits aber

$$(4) \ldots\ldots \begin{cases} \cot WP = \dfrac{l}{\sqrt{h^2+k^2}} \cdot \dfrac{a}{c} \\ \tan UWP = \dfrac{k}{h} \end{cases}$$

geben.

Für die zwei Flächen $P(hkl)$ und $Q(mn0)$, von welchen die letztere in die Zone $UV = [001]$ fällt, hat man aus dem Dreiecke PQW

$$\cos QP = \sin WP \cos QWP = \sin WP \cos (UWP - UWQ)$$

und daher mit Berücksichtigung der zweiten Gleichung (4)

$$(5) \ldots\ldots \left\{ \cos QP = \frac{hm + kn}{\sqrt{h^2+k^2}\sqrt{m^2+n^2}} \sin WP \right.$$

Spezielle Fälle der letzten Gleichung sind

$$(6) \ldots\ldots \begin{cases} \cos UP = \dfrac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} \sin WP \\ \cos VP = \dfrac{k}{\sqrt{h^2+k^2}} \sin WP \end{cases}$$

Sind $P(hkl)$ und $P'(h'k'l')$ zwei beliebige Flächen, Fig. 290, so hat man für die Indices des Zonenkreises PP' bekanntlich

$$\mathrm{u} = kl' - lk', \ \mathrm{v} = lh' - hl', \ \mathrm{w} = hk' - kh';$$

der Durchschnittspunkt dieses Zonenkreises mit dem Kreise $UV = [001]$ ist der Pol der Fläche $Q(\mathrm{v}\bar{\mathrm{u}}0)$, der Punkt Q' aber, welcher in dem letzten Zonenkreise um 90^0 von Q absteht, der Pol der Fläche $Q'(\mathrm{uv}0)$, da ja für denselben

$$\tan UWQ' = \tan (90 - UWQ) = - \cot UWQ$$

sein muss. Demzufolge ist ferner der Durchschnittspunkt S der Zonenkreise PP' und $Q'W$ der Pol der Fläche $S(-\mathrm{uv}, -\mathrm{vw}, \mathrm{u}^2 + \mathrm{v}^2)$. Für die vier tautozonalen Flächen P, P', Q, S muss aber nach §. 93 die Gleichung bestehen

$$\frac{\sin QP \sin SP'}{\sin QP' \sin SP} = \left[\frac{QP}{QP'}\right]\left[\frac{SP'}{SP}\right]$$

Nun ist aber der Bogen QS offenbar $= 90^0$, folglich

$$\left[\frac{QP}{QP'}\right]\left[\frac{SP'}{SP}\right] = \frac{\sin QP \cos QP'}{\sin QP' \cos QP} = \frac{\tan QP}{\tan (QP + PP')}$$

und wenn man die Symbole wirklich berechnet

$$\tan(QP + PP') = \frac{(hh' + kk' + ll')ll' - (h^2 + k^2 + l^2)l'^2}{(hh' + kk' + ll')ll' - (h'^2 + k'^2 + l'^2)l^2} \tan QP. \quad (7)$$

Addirt und subtrahirt man von dieser Gleichung

$$\tan QP = \tan QP$$

so findet man durch Division der so erhaltenen zwei Gleichungen schliesslich

$$\sin(2QP + PP') =$$
$$= \frac{2(hh' + kk' + ll')ll' - (h'^2 + k'^2 + l'^2)l^2 - (h^2 + k^2 + l^2)l'^2}{(h'^2 + k'^2 + l'^2)l^2 - (h^2 + k^2 + l^2)l'^2} \sin PP'. (8)$$

Bestimmung der Position des Poles der Fläche $P(hkl)$. Hiezu muss natürlich das Axenlängen-Verhältnis $\frac{a}{c}$ bekannt sein; dann ist die Aufgabe durch die Gleichungen (4) gelöst. Der Winkel UWP ist immer nach derselben Richtung von UW wegzuzählen, und zwar rechnet man denselben positiv in der Richtung von $U(100)$ nach $V(010)$.

Ist P ein Punkt der Zone UV, so wird $WP = 90^0$ und $UWP = UP$.

Bestimmung des Winkels zweier Flächen, wenn die Indices der letzteren und das Verhältnis der Axenlängen $a : c$ **bekannt sind.** Wir haben hier die folgenden Fälle:

A) Der Winkel, welchen die Fläche $P(hkl)$ mit einer der Axenebenen bildet, ergibt sich aus den Gleichungen (4) und (6).

B) Zur Berechnung des Winkels zweier Flächen $P(hkl)$ und $Q(mn0)$, wo Q in der Zone UV liegt, dient die Gleichung (5), nachdem man den Werth von WP aus der ersten Gleichung (4) gefunden hat.

C) Um allgemein den Winkel zweier Flächen $P(hkl)$ und $P(h'k'l')$ zu bestimmen, von denen keine in die Zone UV fällt, kann man aus den Gleichungen (4) und (5) den Bogen QP bestimmen, wo $Q(mn0)$ der Durchschnitt der beiden Zonen PP' und UV ist; die Gleichung (7) gibt alsdann mit positivem oder negativem Vorzeichen den Werth von PP'. Der gleichförmigeren Rechnung wegen kann man jedoch mit Vortheil den nachfolgenden Weg zur Berechnung von PP' einschlagen.

Man bestimme die Indices der Fläche Q, welche in den beiden Zonen PP' und UV liegt und berechne aus der ersten Gleichung (4)

die Grössen WP und WP'; die Gleichung (5) gibt alsdann QP und QP', und man hat schliesslich nur $PP' = QP' \backsim QP$ zu setzen, wo das Zeichen $\backsim$ bedeutet, dass der kleinere Bogen vom grösseren subtrahirt werden soll.

Bestimmung der Indices einer Fläche $P(hkl)$, wenn das Verhältnis $a : c$ bekannt ist. Die zur Bestimmung der Indices einer Fläche nothwendigen zwei gegebenen Grössen können sein:

A) Die Position der Fläche P; die Indices ergeben sich dann sogleich aus den Gleichungen (3).

B) Die Winkel, welche die Fläche P mit zwei der Axenebenen bildet; man berechne sich aus der entsprechenden Gleichung (1) die Neigung von P zur dritten Axenebene und findet alsdann die Indices unmittelbar aus den Gleichungen (2).

C) Sind die Winkel PF und PF' gegeben, welche P mit den zwei bekannten Flächen F und F' bildet, oder aber

D) ist nur ein solcher Winkel, PF etwa, gegeben, uns jedoch das Symbol [uvw] einer Zone bekannt, welche durch P geht, so ergibt sich die Lösung der gestellten Aufgabe nach der im §. 103 angegebenen Methode. Es sind dort für den gegenwärtigen Fall statt T, M, M' die Buchstaben W, U, V zu setzen, wobei W der Pol von UV ist.

Bestimmung des Verhältnisses der Axenlängen $a : c$ aus dem Winkel zweier Flächen, deren Indices bekannt sind. Die Auflösung dieser Aufgabe wird unmöglich, sobald die zwei Flächen in der Zone UV liegen, da alle Winkel dieser Zone von dem Verhältnisse $a : c$ unabhängig sind. Die verschiedenen Fälle sind:

A) Ist der Winkel WP der Flächen $P(hkl)$ und $W(001)$ gegeben, so erhält man $a : c$ unmittelbar aus der ersten Gleichung (4).

B) Kennen wir die Neigung QP der Fläche $P(hkl)$ zu einer Fläche $Q(mn0)$ der Zone UV, so finden wir aus Gleichung (5) die Grösse WP und hiermit aus der ersten Gleichung (4) das Verhältnis $a{:}c$.

C) Um aber aus dem Winkel PP' zweier Flächen $P(hkl)$ und $P'(h'k'l')$, von denen keine der Zone UV angehört, das Verhältnis $a : c$ zu berechnen, ermitteln wir zuerst die Indices der Fläche $Q(mn0)$ deren Pol derjenige Durchschnittspunkt der zwei Zonenkreise PP' und MM' ist, der auf derselben Seite von P' liegt wie P, für welchen also $\left[\frac{P'Q}{P'P}\right]$ positiv ist. Indem man alsdann aus Gleichung (8) den Werth von QP bestimmt und in Gleichung (5) substituirt, erhält man die Grösse WP und mit derselben aus der ersten Gleichung (4) schliesslich $a : c$.

§. 99. Rhombisches System.

Da in diesem Systeme die Axenebenen auf einander senkrecht stehen, so sind die Pole U, V, W derselben zugleich die Endpunkte der Axenrichtungen, und in dem Dreiecke UVW sind daher die Seiten und die Winkel gleich 90⁰, Fig. 291.

Für jeden Punkt der Sphäre werden aber wie im tesseralen und tetragonalen Systeme die folgenden Gleichungen bestehen müssen:

$$\left.\begin{aligned} \cos UP^2 &= -\cos(VP + WP)\cos(VP - WP) \\ \cos VP^2 &= -\cos(WP + UP)\cos(WP - UP) \\ \cos WP^2 &= -\cos(UP + VP)\cos(UP - VP) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (1)$$

Ist nun P zugleich der Pol der Fläche $P(hkl)$, so haben wir

$$\frac{a}{h}\cos UP = \frac{b}{h}\cos VP = \frac{c}{l}\cos WP \quad . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

aus welchen Gleichungen, da den beiden Dreiecken PUW und PVW zufolge

$$\left.\begin{aligned} \cos UP &= \sin WP \cos UWP \\ \cos VP &= \sin WP \cos UWP \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

sein muss, man leicht

$$\left.\begin{aligned} \tan UWP &= \frac{a}{b}\,\frac{k}{h} \\ \cot WP &= \frac{a}{c}\,\frac{l}{h}\cos UWP = \frac{b}{c}\,\frac{l}{k}\sin UWP \end{aligned}\right\} \quad . \; (4)$$

erhält.

Liegen die beiden Flächen $P(hkl)$ und $P(h'k'l')$ in einer Zone mit $W(001)$, so ist offenbar der Winkel UWP gleich UWP' und die zweite Gleichung (4) gibt daher

$$\frac{\cot WP}{\cot WP'} = \frac{lh'}{hl'} = \frac{lk'}{kl'}$$

welche Gleichung anders geschrieben in die erste der folgenden Gleichungen übergeht:

$$\left.\begin{aligned} \tan WP' &= \frac{lh'}{l'h}\tan WP = \frac{lk'}{l'k}\tan WP \\ \tan VQ' &= \frac{kl'}{k'l}\tan VQ = \frac{kh'}{k'h}\tan VQ \\ \tan UR' &= \frac{hk'}{h'k}\tan UR = \frac{hl'}{h'l}\tan UR \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (5)$$

Die zwei letzten dieser Gleichungen erhalten wir nämlich, wenn wir einmal zwei Flächen $Q(hkl)$ und $Q'(h'k'l')$ betrachten, die mit $V(010)$ in einer Zone liegen, das anderemal aber zwei mit $U(100)$ tautozonale Flächen $R(hkl)$ und $R'(h'k'l')$ ins Auge fassen; was von der einen der Axenebenen W gilt, muss ja auch für die Axenebenen U und V gelten, da wir ja jeder der Axenebenen das Symbol (001) ertheilen können.

Addirt und subtrahirt man von der ersten Gleichung (5) die Gleichung

$$\tan WP = \tan WP$$

und dividirt die beiden so gewonnenen Gleichungen durcheinander, so erhält man die erste der nachfolgenden Gleichungen, die sich alle auf die nämliche Art ableiten lassen:

$$(6)\;.\;\begin{cases}\sin(2WP + PP') = \dfrac{lh'+hl'}{lh'-hl'}\sin PP' = \dfrac{lk'+lk}{lk'-lk}\sin PP' \\ \sin(2VQ + QQ') = \dfrac{kl'+lk'}{kl'-lk'}\sin QQ' = \dfrac{kh'+hk'}{kh'-hk'}\sin QQ \\ \sin(2UR + RR') = \dfrac{hk'+kh'}{hk'-kh'}\sin RR' = \dfrac{hl'+lh'}{hl'-lh'}\cdot\sin RR'\end{cases}$$

In den Gleichungen (5) und (6) sind die Winkel PP', QQ', RR' offenbar mit negativen Zeichen zu nehmen, falls die Pole P', Q', R' zwischen den Polen P, Q, R und den Polen der betreffenden Axenebenen liegen.

Bestimmung der Position des Poles $P(hkl)$, wenn das Verhältnis der Axenlängen $a:b:c$ gegeben ist. Man berechne aus der ersten Gleichung (4) zuerst den Werth von UWP, dann gibt die zweite Gleichung (4) auch noch den Werth von WP. Der Winkel UWP ist immer nach derselben Richtung, und zwar positiv von $U(100)$ nach $V(010)$ zu zählen.

Fällt P in die Zone UV, so ist natürlich $WP = 90^0$; liegt P in der Zone UW, so ist $UWP = 0$, liegt P aber in VW, so ist $UWP = 90^0$.

Bestimmung des Winkels zweier Flächen, wenn die Indices der letzteren und das Verhältnis der Axenlängen $a:b:c$ bekannt ist. Handelt es sich darum,

A) den Winkel zu finden, welchen die Fläche $P(hkl)$ mit einer der Axenebenen bildet, so haben wir die Gleichungen (4) und (3) anzuwenden. Soll aber

B) der Winkel PP' zweier beliebiger Flächen $P(hkl)$ und $P(h'k'l')$ gefunden werden, so ist der im §. 102 angegebene Weg einzuschlagen; die dort gebrauchten Buchstaben T, M, M' sind jedoch durch W, U, V zu ersetzen. Da W der Pol der Zone UV ist, so hat man zur Berechnung von PP' nur solche sphärische Dreiecke aufzulösen, in denen immer eine Seite oder ein Winkel gleich 90° ist.

Bestimmung der Indices einer Fläche $P(hkl)$ aus zwei gegebenen Daten, wenn das Verhältnis $a:b:c$ bekannt ist. Wir unterscheiden die Fälle:

A) Ist die Position des Poles P gegeben, so findet man die Indices leicht aus den Gleichungen (4).

B) Sind die Winkel gegeben, welche P mit zwei der Axenebenen bildet, so berechne man sich zuerst aus der entsprechenden Gleichung (1) die Neigung von P zur dritten Axenebene und dann aus den Gleichungen (2) die Indices selbst.

C) Sind die Winkel PF und PF' gegeben, welche P mit den zwei bekannten Flächen F und F' bildet, oder aber

D) Ist nur ein solcher Winkel, PF etwa gegeben, uns jedoch das Symbol [uvw] einer Zone bekannt, welche durch P geht, so haben wir zur Bestimmung der Indices von P die im §. 103 angegebene allgemeine Methode einzuschlagen, wobei die dort gebrauchten Buchstaben T, M, M' durch W, U, V zu ersetzen sind und W der Pol von UV ist.

Bestimmung des Verhältnisses der Axenlängen $a:b:c$ aus zwei gegebenen Normalenwinkeln. Die Lösung dieser Aufgabe ist in folgenden speziellen Fällen möglich:

A) Sind die Indices und die Position einer Fläche $F(hkl)$ gegeben, so findet man aus der ersten Gleichung (3) den Werth von $a:b$, aus der zweiten aber $a:c$.

B) Die Position einer Fläche aus den Zonen VW, WU, UV genügt zur Bestimmung des Axenverhältnisses natürlich nicht, da die Position einer solchen Fläche nur von dem Verhältnisse zweier Axenlängen abhängt, das allerdings mittelst der Gleichungen (3) daraus gefunden werden kann. Man kann daher das Axenverhältnis $a:b:c$ immer leicht bestimmen, sobald die Positionen zweier bekannten Flächen P und P' die verschiedenen der Zonen VW, WU, UV angehören, gegeben sind.

C) Sind nebst den Indices einer Fläche $P(hkl)$ die Winkel bekannt, die sie mit zwei der Axenebenen bildet, so berechne man sich aus der entsprechenden Gleichung (1) die Neigung der Fläche P zur

dritten Axenebene. Die Substitution dieser drei Winkel in die Gleichungen (2) gibt dann die gesuchten Verhältnisse $\frac{b}{a}$ und $\frac{c}{a}$.

D) Sind MP und NQ die Neigungen der Flächen $P(hkl)$ und $Q(pqr)$ zu zwei verschiedenen der Axenebenen, die wir allgemein mit M und N bezeichnen wollen, so findet man aus diesen Winkeln das Axenverhältnis auf folgende Weise. Man berechne sich die Indices der Fläche S, welche in den beiden Zonen MP und NQ liegt, und hierauf mittelst der entsprechenden der zwei Gleichungen (5) die Winkel MS und NS.

In Betreff der Fläche S kennt man alsdann das Symbol und die Winkel, die sie mit zwei der Axenebenen bildet, und kann daher nach der unter C) gegebenen Methode das Verhältnis $a : b : c$ ermitteln.

E) Ist der Winkel PP' der zwei Flächen $P(hkl)$, $P'(h'k'l')$ und der Winkel QQ' der Flächen $Q(pqr)$, $Q'(p'q'r')$ gegeben und geht die Zone PP' durch eine der Axenebenen, M etwa, die Zone QQ' aber durch eine andere Axenebene N, so geben, wenn S der Durchschnitt der Zonen PP' und QQ' ist, die entsprechenden zwei Gleichungen (6) die Werthe von MP und NQ. die Gleichungen (5) aber dann die Werthe von MS und NS, woraus, wie im vorhergehenden Falle die Axenlängen nach C) gefunden werden können.

F) Das Verhältnis der Axenlängen lässt sich auch ermitteln, wenn die Indices und Winkel dreier Flächen P, P', Q einer und derselben Zone [uvw] bekannt sind, Fig. 291. Die Durchschnittspunkte dieses Zonenkreises mit den Kreisen VW, WU, UV sind nämlich die Pole der Flächen $L(0w\bar{v})$, $M(\bar{w}0u)$, $N(v\bar{u}0)$, für welche man nach §. 93 die Winkel PL, PM, PN ermitteln kann; man kennt dann auch die Winkel zwischen L, M, N, da mit Berücksichtigung der Vorzeichen der früheren Winkel

$$MN = PN - PM,\quad LN = PN - PL$$

ist. Aus den Dreiecken LNW und MNW erhält man aber

$$\cot WL = \sin NL \cos WNL$$
$$\cot WM = \sin NM \cos WNM = \sin NM \cos WNL$$
$$\cot NM = \sin WM \cos NWM$$

und durch Division der zwei ersten Gleichungen mit Berücksichtigung der Werthe, die sich für cot WL und cot WM aus der zweiten Gleichung (3) ergeben

$$\frac{a}{b} = \frac{v}{u} \frac{\sin NM}{\sin NL}$$

Dieser Gleichung zufolge gibt die erste Gleichung (3)

$$\tan UWN = \frac{a}{b} \cdot \frac{u}{v} = - \frac{\sin NM}{\sin NL}$$

und man findet daher die Axenlängen a, b, c durch successives Auflösen der folgenden Gleichungen:

$$\tan UWN = - \frac{\sin NM}{\sin NL}$$

$$\sin WM = \frac{\cos NM}{\cos UWN}$$

$$\frac{a}{c} = - \frac{w}{u} \cot WM$$

$$\frac{a}{b} = \frac{v}{u} \frac{\sin NM}{\sin NL}$$

§. 100. Monoklinisches System.

In diesem Systeme ist die YAxe senkrecht zu den beiden anderen Axen; auf der Sphäre der Projektion wird daher, wenn U, V, W die Pole der Axenebenen, X, Y, Z die Endpunkte der Axen sind, V mit Y zusammenfallen müssen, Fig. 292. Da aber letztere Punkte beziehungsweise die Pole der Zonenkreise UW und XZ sind, so müssen auch die Punkte U, W, X, Z in einem grössten Kreise liegen. Nun ist $UZ = 90^0$ und ebenso $WX = 90^0$, daher, wenn wir diese Gleichungen addiren und η den schiefen Axenwinkel bezeichnet

$$\eta + UW = 180^0 \quad \dots\dots\dots\dots (1)$$

wird. Da auch die Winkel UVZ und WVX natürlich gleich 90^0 sind, so findet man für den beliebigen Punkt P der Sphäre aus den Dreiecken PVX und PVZ

$$\cos ZP = \sin VP \cos ZVP = \sin VP \sin UVP$$
$$\cos XP = \sin VP \cos XVP = \sin VP \sin (UW - UVP)$$
$$= \sin VP \sin (\eta + UVP)$$

Ist nun P der Pol einer Fläche (hkl), somit

$$\frac{a}{h} \cos XP = \frac{b}{k} \cos VP = \frac{c}{l} \cos ZP \quad . \; . \; (2)$$

so hat man den vorhergehenden Gleichungen zufolge

$$\frac{a}{h} \sin (\eta + UVP) = \frac{b}{k} \cos VP = \frac{c}{l} \sin UVP \; . \; . \; (3)$$

also auch

$$\frac{\sin(\eta + UVP)}{\sin UVP} = \frac{c}{a}\,\frac{h}{l}$$

Addirt und subtrahirt man von dieser Gleichung beiderseits 1 und dividirt die so erhaltenen zwei Gleichungen durcheinander, so findet man schliesslich, wenn der Winkel δ durch die erste der folgenden Gleichungen bestimmt wird

$$(4)\ \ldots \begin{cases} \tan\delta = \dfrac{c}{a}\,\dfrac{h}{l} \\ \tan\left(UVP + \dfrac{\eta}{2}\right) = \tan\dfrac{\eta}{2}\tan(135^0 - \delta) \\ \cot VP = \dfrac{a}{b}\,\dfrac{k}{h}\sin(\eta + UVP) = \dfrac{c}{b}\,\dfrac{k}{l}\sin UVP \end{cases}$$

Aus den Dreiecken UPV und WPV erhält man aber unmittelbar

$$(5)\ \ldots \begin{cases} \cos UP = \sin VP\cos UVP \\ \cos WP = -\sin VP\cos(\eta + UVP) \end{cases}$$

also auch

$$\frac{\cos WP}{\cos UP} = -\frac{\cos(\eta + UVP)}{\cos UVP}$$

Addirt und subtrahirt man von dieser Gleichung beiderseits 1, so gibt die Division dieser zwei neuen Gleichungen

$$(6)\ .\ \tan\left(UVP + \frac{\eta}{2}\right) = \cot\frac{\eta}{2}\tan\frac{UP + WP}{2}\tan\frac{UP - WP}{2}$$

Sind $P(hkl)$ und $P'(h'k'l')$ zwei mit der Fläche $V(010)$ tautozonale Flächen, so ist offenbar der Winkel UVP gleich dem Winkel UVP' und daher der letzten Gleichung (4) zufolge

$$(7)\ \ldots\ \cot VP = \frac{kl'}{k'l}\tan VP' = \frac{kh'}{k'h}\tan VP'$$

Dadurch, dass man zu dieser Gleichung beiderseits $\pm \tan VP$ addirt und die zwei so erhaltenen Gleichungen durcheinander dividirt, findet man

$$(8)\ .\ \sin(2VP + PP') = \frac{kl' + lk'}{kl' - lk'}\sin PP' = \frac{kh' + hk'}{kh' - hk'}\sin PP'$$

in welcher Gleichung der Winkel PP' mit negativen Vorzeichen zu nehmen ist, falls P' zwischen V und P liegt.

Bestimmung der Position des Poles der Fläche $P(hkl)$, wenn die Elemente $(a:b:c, \eta)$ gegeben sind. Man berechne aus der ersten Gleichung (4) den Werth des Winkels δ, dann aus der zweiten dieser Gleichungen den Winkel UVP und schliesslich aus der dritten Gleichung den Bogen VP. Die Stücke VP und UVP geben die Position der Fläche $P(hkl)$.

Der Winkel UVP ist immer nach derselben Richtung von UV weg zu zählen, und zwar als positiv in der Richtung von $U(100)$ nach $W(001)$. Fällt der Pol P in den Zonenkreis UW, so ist $VP = 90^0$ und $UVP = UP$, andererseits ist, wenn P der Zone UV angehört, $UVP = 0$, und wenn P in der Zone WV liegt, $UVP = UW = 180^0 - \eta$.

Bestimmung des Winkels zweier Flächen, wenn die Indices der letzteren und die Elemente gegeben sind. Soll

A) die Neigung der Fläche $P(hkl)$ zu jeder der Axenebenen ermittelt werden, so berechne man sich aus den ersten zwei Gleichungen (4) die Werthe von δ und UVP; die letzte dieser Gleichungen gibt alsdann VP, die Gleichungen (5) aber UP und WP.

B) Der Winkel PP' zweier beliebiger Flächen $P(hkl)$ und $P(h'k'l')$ wird nach der im §. 102 angegebenen allgemeinen Methode gefunden; statt der dort gebrauchten Buchstaben T, M, M' sind jedoch für den gegenwärtigen Fall V, U, W zu setzen, wobei V der Pol der Zone UW ist. In Folge des letzteren Umstandes gelingt die Berechnung des Winkels PP' bloss durch Auflösen solcher sphärischer Dreiecke, in denen immer eine Seite oder ein Winkel gleich 90^0 ist.

Bestimmung der Indices einer Fläche $P(hkl)$ aus zwei gegebenen Daten, wenn die Elemente bekannt sind. Hiebei sind die Fälle zu unterscheiden:

A) Falls die Position des Poles P gegeben ist, findet man die Indices aus der letzten Gleichung (4).

B) Sind die Winkel gegeben, welche P mit der Axenebene V und einer der Axenebenen U und W bildet, so findet man aus der entsprechenden Gleichung (5) den Werth des Winkels UVP und hiermit, wie in dem vorhergehenden Falle aus der letzten Gleichung (4) die Verhältnisse $\frac{k}{h}$ und $\frac{k}{l}$.

C) Sind dagegen die Neigungen der Fläche P zu den Axenebenen U und W gegeben, so findet man den Winkel UVP aus Gleichung (6) und aus der letzten Gleichung (4) dann wieder die Indices.

D) Sind die Winkel PF und PF' gegeben, welche P mit den zwei bekannten Flächen F und F' bildet, oder aber

E) ist nur einer dieser Winkel, PF gegeben, dafür aber das Symbol [uvw] einer Zone bekannt, die durch P geht, so haben wir zur Bestimmung der Indices der Fläche P den im §. 103 angegebenen Weg einzuschlagen, wobei die dort gebrauchten Buchstaben T, M, M' durch U, V, W zu ersetzen sind uud V der Pol von UW ist.

Bestimmung der Elemente ($a : b : c$, η) **aus drei Winkeln zwischen bekannten Flächen.** Die Lösung dieser Aufgabe gelingt in den folgenden speziellen Fällen:

A) Kennt man die Neigungen einer Fläche $P(hkl)$ zu den drei Axenebenen, so erhält man aus der ersten Gleichung (5) den Werth von UVP, aus der zweiten Gleichung aber den Werth von η, die letzte Gleichung (4) gibt dann noch die Werthe von $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{b}$.

B) Sind die Winkel zwischen drei bekannten Flächen Q, Q', R der Zone UW und der Winkel PP' zwischen zwei mit $V(010)$ tautozonalen Flächen $P(hkl)$ und $P'(h'k'l')$ gegeben, so kann man ebenfalls die Elemente berechnen. Nach §. 93 kann man ja die Winkel bestimmen, welche Q mit U, V und S bildet, wo S der Durchschnitt der Zonen VP und UW sein soll und US also gleich UVP ist. Mit Berücksichtigung der Vorzeichen dieser Winkel hat man dann

$$180^0 - \eta = UW = QU - QW, \quad US = UVP = QU - QS$$

Die zweite Gleichung (4) gibt alsdann den Werth von δ und die erste Gleichung hieraus das Verhältnis $c : a$.

Aus dem Winkel PP' kann man aber mit Hilfe der Gleichung (8) den Winkel VP und mittelst desselben schliesslich aus der letzten Gleichung (4) auch noch das Verhältnis $\frac{c}{b}$ oder $\frac{a}{b}$ bestimmen.

C) Sind P, P', P'' drei bekannte Flächen einer Zone, die durch $V(010)$ geht, Q, Q', Q'' aber drei bekannte Flächen einer anderen Zone, die ebenfalls durch $V(010)$ geht, und sind die Neigungen $P'P''$, $Q'Q''$ und PQ gegeben, so findet man aus diesen drei Winkeln die Elemente auf folgende Weise, Fig. 293. Man berechne sich mittelst der Gleichung (8) die Grössen VP'' und VQ'', mit denselben aber nach Gleichung (7) die Grössen VP und VQ.

In dem Dreiecke VPQ kennt man alsdann alle drei Seiten und kann daher die Winkel PVQ und QPV daraus berechnen. Sind nun R, S die Durchschnitte der Zonen VP und VQ mit der Zone UW, ferner T derjenige Durchschnittspunkt der Zonen PQ und UW, für

welche P zwischen T und Q liegt, für den also $\left[\frac{PT}{PQ}\right]$ negativ ist, so hat man ersichtlich $PVQ = RVS$, $QPV = SPT$.

In dem recktwinkligen Dreiecke PRT ist somit eine Seite $PR = 90^0 - VP$ und die zwei anliegenden Winkel bekannt, und man kann somit den Werth von RT daraus ermitteln. Man hat nun in der Zone UW drei Flächen R, S, T, deren Indices und gegenseitige Neigungen bekannt sind, woraus mit Hilfe des Winkels PV etwa nach dem vorhergehenden Falle B) die Elemente bestimmt werden können.

D) Kennt man für die Flächen P, Q die Winkel PQ, PV, QV, so findet man die Elemente nach der eben beschriebenen Methode.

§. 101. Triklinisches System.

Sind U, V, W die Pole der Axenebenen, X, Y, Z aber die Endpunkte der Axenrichtungen, Fig. 294, so hat man, da diese Punkte wechselweise die Pole der durch sie gezogenen Zonenkreise sind, wie schon im §. 89 gezeigt wurde

$$WUV + \xi = UVW + \eta = VWU + \zeta = 180^0 \quad . \; . \; (1)$$

wo ξ, η, ζ die Axenwinkel bedeuten. Ebenso ist aber auch

$$ZXY + VW = XYZ + WU = YZX + UV = 180^0$$

daher die sphärischen Dreiecke UVW und XYZ 6 Gleichungen von den folgenden Formen geben:

$$\cot\frac{\xi}{2} = \sqrt{\left\{\frac{\sin(S - WU)\sin(S - UV)}{\sin S \sin(S - VW)}\right\}} \quad . \; . \; . \; (2)$$

. . . .

$$\cot\frac{VW}{2} = \sqrt{\left\{\frac{\sin(s - \eta)\sin(s - \zeta)}{\sin s \sin(s - \xi)}\right\}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

. . . .

wobei S und s die folgenden Werthe haben.

$$S = \tfrac{1}{2}(UW + WU + UV)$$
$$s = \tfrac{1}{2}(\xi + \eta + \zeta)$$

Ist P der Pol einer Fläche (hkl), und sind a, b, c die Axenlängen, so hat man

$$\frac{a}{h}\cos XP = \frac{b}{k}\cos YP = \frac{c}{l}\cos ZP \quad . \; . \; . \; . \; (4)$$

Aus den sphärischen Dreiecken PAY und PAZ findet man aber leicht

$$\cos YP = \sin UP \cos PUY = \sin UP \sin WUP$$
$$= \sin UP \sin (VUW - VUP) = \sin UP \sin (VUP + \xi)$$
$$\cos ZP = \sin UP \cos PUZ = \sin UP \sin VUP$$

und wenn man diese Werthe in Gleichung (4) substituirt

$$\frac{\sin (VUP + \xi)}{\sin VUP} = \frac{c}{b} \frac{k}{l}$$

Addirt und subtrahirt man von dieser Gleichung beiderseits 1 und dividirt die so erhaltenen zwei Gleichungen durcheinander, so findet man durch Einführung des Winkels ϑ die erste der folgenden Gleichungen:

$$(5) \begin{cases} \tan \vartheta = \frac{c}{b} \frac{h}{l}, \ \tan \left(VUP + \frac{\xi}{2} \right) = \tan \frac{\xi}{2} \tan (135^0 - \vartheta) \\ \tan \delta = \frac{a}{c} \frac{l}{h}, \ \tan \left(\tan WVP + \frac{\eta}{2} \right) = \tan \frac{\eta}{2} \tan (135^0 - \delta) \\ \tan \varepsilon = \frac{b}{a} \frac{l}{k}, \ \tan \left(\tan UWP + \frac{\zeta}{2} \right) = \tan \frac{\zeta}{2} \tan (135^0 - \varepsilon) \end{cases}$$

Die zwei letzten dieser Gleichungen liessen sich auf ähnliche Art beweisen, ergeben sich aber auch schon durch blosse Vertauschung der Buchstaben, da ja, was für die eine der Axenebenen gilt, in diesem Falle auch von den anderen gelten muss.

Sind L, M, N die Punkte, in welchen die Zonenkreise UP, VP, WP beziehungsweise die Kreise VW, WU, UV schneiden, so findet man aus den 6 Dreiecken, in welche dadurch das Dreieck UVW getheilt wird, die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sin VL \ \sin VLP &= \sin UV \ \sin VUP \\ \sin WU \ \sin WUP &= \sin WL \ \sin WLP \\ \sin WM \ \sin WMP &= \sin VW \ \sin WVP \\ \sin UV \ \sin UVP &= \sin UM \ \sin UMP \\ \sin UN \ \sin UNP &= \sin WN \ \sin UWP \\ \sin VW \ \sin VWP &= \sin VN \ \sin VNP \end{aligned}$$

Addirt man diese Gleichungen und berücksichtigt, dass

$$\sin VLP = \sin WLP, \ \sin WMP = \sin UMP, \ \sin UNP = \sin VNP$$

ist, so erhält man für jeden Punkt der Sphäre

$$(6) \ . \ . \ \sin VL \sin WM \sin UN = \sin WL \sin UM \sin VN$$

Bestimmung der Position des Poles der Fläche $P(hkl)$, wenn die Elemente $(a:b:c, \xi, \eta, \zeta)$ gegeben sind. Man berechne sich aus den Gleichungen (5) die Werthe von ϑ, ε, NUP, UWP und

aus der zweiten Gleichung (3) den Werth von WU, dann kennt man in dem Dreiecke UWP die Seite UW und die anliegenden Winkel UWP und $WUP = 180^0 - (VUP + \xi)$ und kann hieraus WP berechnen, welcher Bogen in Verbindung mit dem Winkel UWP die Position von P bestimmt.

Wir bemerken hier noch, dass bei diesem wie bei den folgenden Problemen jeder Winkel stets mit dem Vorzeichen in die Rechnung einzuführen ist, mit welchem er sich aus einer der Gleichungen (1) bis (6) ergeben hat.

Bestimmung des Winkels zweier bekannter Flächen, wenn die Elemente gegeben sind. Wir unterscheiden hiebei folgende Fälle:

A) Der Winkel zwischen zwei Axenebenen ergibt sich aus der entsprechenden Gleichung (3).

B) Den Winkel, den die Fläche $P(hkl)$ mit irgend einer der Axenebenen bildet, findet man auf dieselbe Art wie bei der Bestimmung der Position des Poles P der Winkel WP ermittelt wird.

Sollen alle drei Winkel UP, VP, WP bestimmt werden, so wird man aus den Gleichungen (5) zuerst die Werthe von ϑ, ε, VUP, UWP, aus den Gleichungen (3) die Werthe von WU und VW, aus dem Dreiecke UVP aber, in welchem $WUP = 180^0 - (VUP + \xi)$ ist, mittelst der Neper'schen Analogien die Bogen UP und WP berechnen. In dem Dreiecke VPW kennt man alsdann die zwei Seiten VW, PW und den eingeschlossenen Winkel $VWP = 180^0 - (UWP + \zeta)$ und kann hieraus schliesslich noch den Werth von VP ermitteln.

C) Ist jedoch der Winkel PP' zweier beliebiger Flächen $P(hkl)$ und $P(h'k'l')$ zu bestimmen, so hat man den im §. 102 angegebenen Weg einzuschlagen, indem man statt der dort benützten Buchstaben T, M, M' für den gegenwärtigen Fall W, U, V setzt.

Bestimmung der Indices einer Fläche $P(hkl)$ aus zwei gegebenen Daten, wenn die Elemente bekannt sind. Sollen

A) die Indices aus der Position des Poles P ermittelt werden, sind also die Grössen WP und UWP gegeben, so berechne man aus der zweiten Gleichung (3) den Werth von WU und alsdann aus dem Dreiecke PWU den Winkel $WUP = 180^0 - (VUP + \xi)$; mit Hilfe der Winkel UWP und VUP kann man alsdann aus den Gleichungen (5) zuerst die Winkel ϑ und ε und mit diesen die Verhältnisse $\frac{k}{l}$ und $\frac{h}{k}$ bestimmen.

B) Sind die Winkel gegeben, welche die Fläche P mit zwei der Axenebenen bildet, so berechne man die Neigung dieser zwei Axen-

ebenen aus der entsprechenden Gleichung (3), und kann dann aus dem durch die Pole dieser Axenebenen und der Fläche P gebildeten Dreiecke mit Rücksicht auf die Gleichungen (1) zwei der Winkel VUP, WVP, UWP bestimmen, mit Hilfe derer man dann aus den betreffenden Gleichungen (5) zwei der Verhältnisse $\frac{k}{l}$, $\frac{l}{h}$, $\frac{h}{k}$ findet.

C) Sind die Winkel PF und PF' gegeben, welche P mit den zwei bekannten Flächen F und F' bildet, oder aber

D) ist nur einer dieser Winkel, PF etwa gegeben, dafür aber das Symbol [uvw] einer Zone bekannt, die durch P geht, so haben wir zur Bestimmung der Indices der Fläche P den im §. 103 bezeichneten Weg zu gehen, aber hiebei die Buchstaben T, M, M' durch W, U, V zu ersetzen.

Bestimmung der Elemente ($a:b:c$, ξ, η, ζ) aus fünf Winkeln zwischen bekannten Flächen. Die Lösung dieser Aufgabe gelingt in den folgenden speziellen Fällen, in welchen P, L, M, N die Pole der Flächen $P(hkl)$, $L(0kl)$, $M(h0l)$, $N(0kl)$, also L, M, N die Durchschnittspunkte der Zonen PU, PV, PW mit MN, NL, LM sein sollen.

A) Sind die Neigungen VW, WU, UV der Axenebenen und die Winkel UP, WP, welche P mit zwei der Axenebenen, etwa U, W bildet, gegeben, so erhält man aus den Gleichungen (2) die Werthe von ξ, η, ζ, aus dem Dreiecke UWP aber die Winkel UWP und WUP, mittelst derer man dann aus den betreffenden Gleichungen (5) noch die Verhältnisse $\frac{c}{b}$ und $\frac{b}{a}$ findet.

B) Sind von den Winkeln, welche die Axenebenen mit einander bilden, zwei, etwa UW und VW gegeben, und sind die Neigungen UP, VP, WP der Fläche P zu allen drei Axenebenen bekannt, so erhält man aus den Dreiecken UPW und VPW die Winkel UWP, VWP und WVP, da $UWV = UWP + VWP$ ist, so findet man alsdann aus dem Dreiecke UVW die dritte Seite UV und kann somit aus den Gleichungen (2) die Winkel ξ, η, ζ, aus den Gleichungen (5) aber mittelst der Winkel UWP und WVP die Verhältnisse $\frac{c}{b}$ und $\frac{a}{c}$ bestimmen.

C) Sind von den sechs Winkeln VL, WL, WM, UM, UN, VN fünf gegeben, so findet man den sechsten aus Gleichung (6) und kann alsdann aus dem Dreiecke UVW die Winkel WUV und WVU und mittelst derselben aus den Dreiecken NUW und LVU die Werthe der

Winkel UWP und VUP bestimmen; die Gleichungen (2) geben schliesslich ξ, η, ζ, die zwei letzten Gleichungen (5) aber $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{a}$

D) Sind von früheren sechs Winkeln nur vier, wie etwa VL, WL, WM, UM, dafür aber auch der Winkel UV gegeben, so findet man aus dem Dreiecke UVW die Winkel WUV und WVU, aus den Dreiecken LVU und MVU aber die Winkel VUP und $UVP = 180^0 - (WVP + \eta)$ und kann somit wiederum mittelst der Gleichungen (2) und (5) die Elemente bestimmen.

§. 102. Berechnung des Normalenwinkels zweier Krystallflächen.

Bestimmen wir die Position einer Fläche P mit Rücksicht auf den Pol T und den durch denselben gelegten Zonenkreis MT, so ist die Position dieser Fläche gegeben durch die Winkel TP und MTP. Betrachten wir den Winkel TP immer als positiv, so müssen wir den Winkel MTP für verschiedene Flächen immer nach derselben Richtung von MT wegrechnen. Will man hiebei Winkel, die grösser als 180^0 sind, vermeiden, so kann man für dieselben auch ihre Ergänzung zu 360^0 mit negativen Vorzeichen nehmen. Hiernach wollen wir das folgende Problem lösen:

Aufgabe. Aus den Elementen eines Krystalles und den Indices zweier Flächen P, P' den Normalenwinkel PP' derselben zu finden, Fig. 295.

Allgemeine Auflösung. Man bestimme die Position der Pole P und P', d. h. die Grössen

$$TP,\ MTP,\ TP',\ MTP'$$

dann kennt man in dem Dreiecke PTP' die beiden Seiten TP, TP' und den eingeschlossenen Winkel $PTP' = MTP \sim MTP$, indem man den kleineren von dem grösseren Winkel subtrahirt. Man kann somit aus diesem Dreiecke die dritte Seite nach den bekannten Formeln der sphärischen Trigonometrie berechnen; man hat nämlich für dieselbe die Gleichungen

$$\cos PP' = \frac{\cos TP}{\sin \varphi} \sin (TP' + \varphi), \cot \varphi = \operatorname{tg} TP \cos (MTP \sim MTP')$$

Spezielle Auflösung. Ist T der Pol einer bekannten Zone $[MM']$, so kann man den Bogen PP' bloss mit Hilfe rechtwinkliger Dreiecke auf folgende Weise bestimmen: Man berechne die Indices der Fläche Q, welche in den beiden Zonen PP' und MM' liegt, ferner die Positionen von P, P, Q, also die Grössen

$$TP,\ MTP,\ TP',\ MTP',\ TQ = 90^0,\ MTQ$$

Man erhält alsdann aus den Dreiecken PTQ und $P'TQ$ die Winkel QP und QP' nach folgenden Formeln:

$$\cos QP = \sin TP \cos (MTP - MTQ)$$
$$\cos QP' = \sin TP' \cos (MTP' - MTQ)$$

und hat schliesslich

$$PP' = QP \sim QP'$$

Hiebei ist genau auf das Vorzeichen aller Winkel zu sehen.

Fallen P und P' in die Zone MM', so hat man einfach, um PP' zu finden, die Winkel MTP und MTP' von einander zu subtrahiren.

§. 103. Bestimmung der Indices einer Krystallfläche aus zwei bekannten Daten.

Insoferne die Indices einer Fläche nicht durch die Regeln der §§. 92 und 93 bestimmt werden können, beruht ihre Ermittlung auf der Lösung der folgenden zwei Aufgaben. Es gelingt nämlich immer, sobald die Elemente des Krystalles bekannt sind, die Indices einer Fläche P zu bestimmen, wenn entweder die Winkel gegeben sind, welche sie mit zwei bekannten Flächen bildet, oder wenn der Winkel mit einer bekannten Fläche und das Symbol einer Zone gegeben ist, in welcher die Fläche P liegt. In beiden Fällen erhält man aber für die gesuchten Indices zwei Systeme von Werthen, indem schon die geometrische Anschauung lehrt, dass für den Pol auf der Kugel immer zwei Lagen möglich sein werden, welche den gegebenen Bedingungen genügen. Allein im Allgemeinen wird nur einer dieser Pole einer möglichen Krystallfläche entsprechen; um aber ganz sicher zu entscheiden, welche Werthe der Indices dem betrachteten Falle entsprechen, muss man andere Angaben über die Lage der Fläche P und etwa die Regeln des §. 14 zu Rathe ziehen. Indem wir zur Betrachtung der einzelnen Aufgaben übergehen, bemerken wir ausdrücklich, dass, um Irrungen zu vermeiden, die beigegebenen Figuren für jeden speziellen Fall hinsichtlich der relativen Lage der einzelnen Pole korrigirt werden müssen.

1. Aufgabe. Gegeben seien die Elemente eines Krystalles, die Symbole der zwei Flächen F, F' und die Winkel PF, PF', die sie mit einer Fläche P bilden: es sollen die Indices der Fläche P ermittelt werden.

Man bestimme die Positionen der Pole P und P' und ihren gegenseitigen Abstand, also die Grössen, Fig. 296,

$$TF, MTF, TF', MTF', FF'$$

durch welche in dem △ *TFF'* und △ *PFF* alle Seiten bekannt werden. Man kann daher aus denselben mit Hilfe der Formeln der sphärischen Trigonometrie die Winkel *TFF'* und *PFF'* berechnen und kennt dann in dem △ *PTF* zwei Seiten *FP*, *TF* und den eingeschlossenen Winkel *TFP*. Aus letzterem Dreiecke erhält man dann die Seite *TP* und den Winkel *FTP*, wodurch, da ja der Winkel *MTF* schon ermittelt wurde, die Position des Poles *P* vollkommen bestimmt ist. Aus dieser Position kann man nun schliesslich, da die Elemente gegeben sind, die Indices der Fläche *P* ermitteln, wie bei jedem einzelnen Krystallsysteme im Vorhergehenden gezeigt wurde.

2. Aufgabe. Gegeben seien die Elemente eines Krystalles, der Winkel *PF*, den die Fläche *P* mit der bekannten Fläche *F* bildet, und das Symbol [uvw] einer Zone, die durch die Fläche *P* geht; es sollen die Indices der Fläche *P* ermittelt werden.

Man bestimme zuerst die Indices der Flächen *Q* und *R*, deren Pole die Durchschnittspunkte der Zone [uvw] mit den Zonen [*FT*] und [*MT*] sind, und berechne die Positionen der Pole *F*, *Q*, *R*, welche durch die Grössen, Fig. 297,

$$TF, MTF = MTQ, TQ, TR$$

gegeben sind. Aus dem △ *QRT*, in welchem man dann zwei Seiten *TQ*, *TR* und den eingeschlossenen Winkel *QTR* kennt, erhält man den Winkel *TQR*, wodurch in dem Dreiecke *PQT* zwei Seiten *PF*, *FQ* und der der ersteren gegenüberliegende Winkel *PQR* gegeben sind. Hiedurch findet man den Winkel *PFQ*, welcher in dem △ *PTF* von den bekannten Seiten *PF* und *TF* eingeschlossen ist. Letzteres Dreieck gibt daher die Seite *TP* und den Winkel *PTF*, wodurch mit Rücksicht auf den ebenfalls bekannten Winkel *MTF* die Position des Poles *F* gegeben ist. Aus der Position des Poles einer Fläche findet man aber deren Indices nach den bei jedem einzelnen Krystallsysteme angegebenen Regeln.

§. 104. Berechnung der Zwillingskrystalle.

Nebst den im Vorhergehenden behandelten Problemen kommen bei der Berechnung der Zwillingskrystalle noch die zwei neuen Probleme vor: erstens den Winkel, welchen eine beliebige Fläche des einen Individuums mit einer beliebigen Fläche des zweiten Individuums bildet, zu berechnen, und zweitens aus zwei solchen Neigungswinkeln die Indices der Zwillingsfläche zu bestimmen. Das zweite Problem kann

aber in dieser Allgemeinheit nicht gelöst werden, seine Lösung gelingt vielmehr nur in den später angegebenen Fällen.

Indem wir die beiden Zwillingsindividuen immer auf Axensysteme beziehen, die durch korrespondirende Flächen gebildet sind, werden die Elemente für beide Individuen dieselben: korrespondirende Flächen fallen ja zusammen, wenn von den im Gleichgewichte gedachten Zwillingsindividuen das eine um die Normale der Zwillingsfläche eine Drehung von 180° erleidet. Nach dieser Bemerkung gehen wir auf die Betrachtung der einzelnen Aufgaben über, auf welche uns die angegebenen zwei Probleme führen.

1. Aufgabe. Wenn die Elemente eines Zwillings und die Indices der Zwillingsfläche Q gegeben sind, den Winkel der zwei korrespondirenden Flächen R, r zu bestimmen.

Nach dem schon im §. 30 Gesagten muss der Pol von Q den Abstand der Pole R und r halbiren; es ist daher $Rr = 2QR$. Der Winkel QR kann aber leicht nach §. 102 gefunden werden, da nebst den Indices die Symbole von Q und R bekannt sind.

Ist r' die zu r entgegengesetzte parallele Fläche, so muss auch r' in der Zone [RQr] liegen, und es ist daher $Rr' = 180^0 - Rr$.

2. Aufgabe. Gegeben seien die Elemente eines Zwillings und die Symbole der Zwillingsfläche Q, der Fläche R des ersten und der Fläche s des zweiten Individuums, es soll der Winkel Rs der zwei letzten Flächen gefunden werden, Fig. 298.

Man berechne zuerst nach §. 102 die Winkel QS, QR, SR, wo S die korrespondirende Fläche zu s ist. Aus dem Δ QRS findet man dann den Winkel QSR, welcher in dem grossen Δ RSs von den bekannten Seiten RS und $Ss = 2QS$ eingeschlossen wird. Aus dem letzten Dreiecke kann man somit die Seite Rs, welches der gesuchte Winkel ist, berechnen.

3. Aufgabe. Bekannt seien an einem Zwillinge die Symbole der Flächen R, S, deren korrespondirende Flächen r, s sind, ferner das Symbol einer Fläche F in der Zone [Rr] und das Symbol einer Fläche G in der Zone [Ss]. Es sollen die Indices der Zwillingsfläche ermittelt werden, Fig. 298.

Aus den gegebenen Daten berechne man die Symbole der Zone [FRr] und der Zone [GSs], und mit Hilfe derselben die Indices der Fläche Q, welche ja in diesen beiden Zonen liegen muss. Es ist hiebei offenbar gleichgiltig, ob die Flächen F und G demselben Individuum angehören oder nicht.

4. Aufgabe. Gegeben seien an einem Zwillinge die Elemente, das Symbol der Fläche *R*, ihre Neigung *Rr* zu der korrespondirenden Fläche *r* und das Symbol einer Fläche *F* in der Zone [*Rr*]: es sind die Indices der Zwillingsfläche *Q* zu ermitteln, Fig. 298.

Man kennt in diesem Falle den Winkel $QR = \frac{1}{2}\, Rr$ und das Symbol der Zone [*QRF*], berechnet man sich nun für die beliebigen Flächen *H*, *J* der letzteren Zone die Winkel *HR* und *JR*, so kann man die Indices von *Q* mit Hilfe der Regeln des §. 93 erhalten.

5. Aufgabe. Gegeben seien für einen Zwilling die Elemente, die Symbole der Flächen *R*, *S*, deren korrespondirende Flächen *r*, *s* sind, ferner das Symbol einer Fläche *F* in der Zone [*Rr*] und der Winkel *Ss*, es soll das Symbol der Zwillingsfläche *Q* gefunden werden, Fig. 298.

Für die Fläche *Q* kennt man also den Winkel $Qs = \frac{1}{2}\, Ss$, den sie mit der Fläche *S* bildet und das Symbol einer Zone [*QFR*], welche durch sie hindurchgeht; ihre Indices können somit nach §. 102 hieraus ermittelt werden, da auch die Elemente gegeben sind.

6. Aufgabe. An einem Zwillinge seien bekannt die Elemente, die Symbole der Flächen *R*, *S* und die Winkel *Rr* und *Sr*, wo *r* die korrespondirende Fläche von *S* ist, es sollen hieraus die Indices der Zwillingsfläche *Q* bestimmt werden, Fig. 298.

Da man die Winkel kennt, welche die Fläche *r* mit den zwei Flächen *R*, *S* des ersten Individuums bildet, so kann nach §. 103 das Symbol von *r* mit Bezug auf das erste Axensystem und mittelst desselben nach §. 91 der Winkel $Rr = 2QR$ berechnet werden. Da sich aus den Symbolen von *R* und *r* auch das Symbol der Zone [*RQr*] berechnen lässt, so findet man die Indices von *Q* nach §. 93, indem man erst für zwei beliebige Flächen *H*, *J* der letzteren Zone die Winkel *RH* und *RJ* ermittelt.

7. Aufgabe. Gegeben seien für einen Zwilling die Elemente, die Symbole der Flächen *R*, *S* des ersten Individuums, das Symbol der Fläche *t* des zweiten Individuums und die Winkel *Rt* und *St*: zu bestimmen sind die Indices der Zwillingsfläche *Q*, Fig. 299.

Da man die Winkel *Rt*, *St* und die Elemente kennt, so kann man nach §. 92 die Indices von *t* mit Bezug auf das erste Axensystem ermitteln. Man berechne dann nach §. 102 den Winkel $Tt = 2QT$, wo *T* die korrespondirende Fläche von *t* ist und daher dasselbe Symbol für das erste Axensystem hat, wie *t* für das zweite Axensystem, welches Symbol ja gegeben ist. Man kennt also auch das Symbol der Zone [*TQt*] und findet die Indices der Fläche *Q* wieder nach §. 93, indem

man zuerst für zwei beliebige Flächen H, J dieser Zone ihre Neigungen zur Fläche T bezeichnet.

8. Aufgabe. Es seien an einem Zwillinge gegeben die Elemente, die Symbole der zwei Flächen R, S und ihre Neigungen Rr, Ss zu den korrespondirenden Flächen r, s, es sollen die Indices der Zwillingsfläche Q bestimmt werden.

In diesem Falle kennt man die Neigung der Fläche Q zu den beiden Flächen R, S, da ja $QR = \frac{1}{2} Rr$, $QS = \frac{1}{2}.Ss$, man findet somit die Indices von Q durch Anwendung des §. 103.

§. 105. Gang bei der Berechnung eines Krystalles.

Indem wir die Methode, wie man durch Beobachtungen die Normalenwinkel der Flächen eines Krystalles bestimmen könne, als bekannt voraussetzen, wollen wir hier den Weg betrachten, der bei der Berechnung dieser Beobachtungen einzuschlagen ist. Hat man also möglichst viele Normalenwinkel zwischen den Flächen des zu bestimmenden Krystalles ermittelt, so entwerfe man zuerst eine Projektion der Pole dieser Flächen und trage in dieselbe die beobachteten Winkel und Zonen ein. Diese Projektion wird natürlich ohne weitere Konstruktionen nur beiläufig ausgeführt, doch wählt man die Projektionsebene nach den im §. 85 gegebenen Regeln, falls man über das System des zu bestimmenden Krystalles schon im Klaren ist. Sonst bleibt die Projektionsebene willkürlich. Sind die beiden Hälften des Krystalles nicht von parallelen Flächen gebildet, so kann man sich für jede Hälfte eine eigene Projektion entwerfen.

Hat man aber von einer Substanz, deren krystallographische Konstanten ermittelt werden sollen, mehrere Krystalle zur Verfügung, so begnügt man sich nicht bloss, einen derselben zu messen, sondern man untersucht deren mehrere, da häufig an verschiedenen Krystallen derselben Substanz verschiedene Flächen vorkommen. Alle die so beobachteten Flächen trägt man mit ihren Polen in eine und dieselbe Projektion ein. Es kommt dabei natürlich darauf an, die einzelnen Krystalle alle in parallele Stellung zu einander zu bringen, und diess setzt voraus, dass an diesem Krystalle gewisse Flächen, die man an ihren konstanten Neigungen erkennt, wiederkehren. Man trifft freilich, besonders bei Mineralien, Krystalle, die von ganz verschiedenen Flächen gebildet werden. Können solche Krystalle nicht etwa mit Hilfe ihrer optischen Eigenschaften in parallele Stellung gebracht werden, so bleibt nichts übrig, als diejenigen Krystalle, die man in parallele Stellung gebracht hat, vollständig zu berechnen und schliesslich nach-

zusehen, ob unter den möglichen Fällen derselben nicht solche vorkommen, die den Flächen der noch übrigen Krystalle entsprechen.

Zur Bestimmung des Systems der zu berechnenden Krystalle ist die Kenntnis ihrer gleichen Winkel nothwendig; geben die beobachteten Winkel hierüber nicht vollständigen Aufschluss, so wird man sich aus denselben mit Hilfe der Projektion der Flächenpole solche Winkel berechnen, die nicht direkt beobachtet werden konnten, deren Kenntnis aber zur Bestimmung des Systems von Wichtigkeit ist. Können aber derartige Winkel nicht aus den beobachteten mit Hilfe der Formeln der sphärischen Trigonometrie abgeleitet werden, so kann man unter irgend einer Voraussetzung für dieselbe die Elemente und Flächenindices berechnen und sich mittelst dieser Grössen nachträglich überzeugen, ob die angenommenen Werthe auch wirklich diesen Winkeln entsprechen.

Hat man das Krystallsystem erkannt, so wird dem betreffenden Systeme entsprechend die Projektion der Flächenpole umgeändert, und es kommt nun darauf an, die Symbole der Flächen zu ermitteln, natürlich mit Bezug auf ein charakteristisches Axensystem, das durch die nöthige Anzahl vorhandener oder bloss möglicher Flächen bestimmt wird. Die Ermittlung der Indices geschieht aus den beobachteten Zonen und Winkeln mit Hilfe der Regeln der §§. 92, 93, und wir wissen, dass, wenn auch die zur Berechnung verwendeten Winkel bis zu einer gewissen Grenze ungenau sind, wir doch immer die wahren Werthe der Indices erhalten. Reichen die §§. 92, 93 zur Bestimmung der Flächensymbole nicht aus, so muss man, um diese Bestimmung nach §. 103 ausführen zu können, wenigstens eine genäherte Kenntnis der Elemente haben. Es genügt aber natürlich, wenn man nur für eine einzige Fläche jeder einfachen Form die Indices durch Rechnung ermittelt; die Symbole der übrigen Flächen ergeben sich ja dann unmittelbar durch die Symmetrieverhältnisse.

Der nächste Schritt ist die Bestimmung der Elemente. Man wählt hiezu aus den mit grösserer Genauigkeit beobachteten Winkeln die gerade nöthige Anzahl, und zwar natürlich solche, die entweder direkt oder durch die aus ihnen abgeleiteten Winkel die Berechnung der Elemente möglich machen.

Mit Hilfe der so bestimmten Elemente berechnet man dann gewöhnlich die Normalenwinkel, für welche beobachtete Werthe vorhanden sind, um durch die Uebereinstimmung dieser zweierlei Grössen den Grad der Genauigkeit der Elemente kennen zu lernen. Ausser diesen Winkeln berechnet man überhaupt noch möglichst viele der Winkel, welche die vorherrschenden Flächen, und zwar besonders die des Ok-

tanten *OXYZ* unter einander bilden. Die so berechneten Winkel werden in einer bestimmten Ordnung aufgeführt und für die betreffenden die beobachteten Werthe daneben gesetzt. Unterscheiden sich die beobachteten Winkel sehr durch den Grad ihrer Genauigkeit, so kann man die guten Winkel etwa durch ein beigesetztes +, die schlechten durch ein ? bezeichnen. Diese Zeichen können zur Steigerung auch noch verdoppelt werden. Die Winkel, welche zur Berechnung gedient haben, bezeichnet man bisweilen mit einem Sternchen, obwohl diess nicht wesentlich erscheint.

Bei Substanzen wie die Mineralien, deren Krystalle Gegenstand häufigerer Untersuchungen sind, ist es sehr zweckmässig, für die berechneten Neigungen eine Tafel zu entwerfen, in der für jede Form die Winkel angegeben sind, welche die zur Bezeichnung dieser Form gewählte Fläche mit den Flächen

$$100,\ 010,\ 001,\ 110,\ \bar{1}10,\ 101,\ \bar{1}01,\ 011,\ 01\bar{1},\ 111 \text{ etc.}$$

bildet.

Bei der Berechnung der Normalenwinkel begnügt man sich für künstliche Krystalle gerade wie bei der Messung meist mit Minuten. Bei Mineralien kann man allerdings in vielen Fällen weiter gehen. Man hat dann die Elemente auch so zu bestimmen, dass für alle guten Beobachtungen die berechneten Werthe möglichst genau übereinstimmen.

Will man sich hiebei nicht mit einer versuchsweisen Aenderung der Elemente begnügen, sondern will man wirklich die aus allen guten Beobachtungen folgenden wahrscheinlichsten Werthe derselben kennen, so hat man den in der folgenden Anmerkung angegebenen Weg einzuschlagen.

Die Ordnung, in der man die vollständigen krystallographischen Eigenschaften einer Substanz aufführt, ist gewöhnlich folgende:

1. Das Krystallsystem, natürlich mit der Angabe, ob dasselbe ein holo- oder hemisymmetrisches ist.

2. Die Werthe der Elemente.

3. Die beobachteten holo- und hemiedrischen Formen mit der Angabe der Beschaffenheit ihrer Flächen; gewöhnlich gibt man auch eine Projektion der Pole dieser Flächen mit den wichtigeren Zonenkreisen.

4. Etwa vorhandene Zwillingsflächen und Theilungsflächen, obwohl letztere so wie die Flächenbeschaffenheit eigentlich zu den physikalischen Eigenschaften zu zählen sind.

5. Die Aufzählung der berechneten Winkel und Vergleichung derselben mit den beobachteten. Der Winkel zweier Flächen eines Krystalles wird bekanntlich durch Nebeneinanderstellung ihrer Symbole

bezeichnet; gehören jedoch die zwei Flächen verschiedenen Individuen eines Zwillings an, so kann man zum Unterschiede entweder das Symbol der einen Fläche auf den Kopf stellen, oder was bequemer ist, man setzt zwischen die Symbole der beiden Flächen das Symbol der Zwillingsfläche.

6. Beschreibung der beobachteten Kombinationen, wobei besonders die vorherrschenden Ausbildungen derselben anzugeben sind. Gewöhnlich illustrirt man solche Beschreibungen durch Zeichnungen, in letzteren muss man aber meist die Flächen wegen ihrer Kleinheit durch einen einzigen Buchstaben bezeichnen. Man wählt dann für jede Form einen anderen Buchstaben, den man für die einzelnen Flächen der Form noch mit verschiedenen Strichen versehen kann. Diese Buchstaben fügt man bei der Aufzählung der einzelnen Formen den Symbolen derselben gleich an, indem man sie entweder hinter oder unter die Symbole setzt.

Anmerkung. Sind mehr Winkel eines Krystalles beobachtet, als die Berechnung seiner Elemente erfordert, so kann man diejenigen Werthe der letzteren, welche allen beobachteten Winkeln möglichst entsprechen, auf folgende Weise finden. Der Krystall sei, um den allgemeinsten Fall zu betrachten, ein trikliuischer; die beobachteten Winkel desselben seien

$$L, M, N \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

die Grössen

$$l, m, n \quad \ldots\ldots$$

aber die Gewichte dieser Winkel. Jede der letzteren Grössen gibt also für den betreffenden Winkel an, wie oft eine gleich gute Beobachtung desselben gemacht werden müsste, damit das arithmetische Mittel aus diesen Beobachtungen für jeden Winkel den gleichen Anspruch auf Genauigkeit hat. Die Grössen

$$a : b : c \quad \xi, \eta, \zeta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

seien ferner genäherte Werthe der Elemente, aus welchen wir für die beobachteten Winkel die Grössen

$$L_0, M_0, N_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

erhalten. Wir ändern nun nacheinander jedes Stück der Elemente um eine kleine Grösse, wodurch dieselben successive in

$$\begin{array}{ll}
a : (b + \Delta b) : c, & \xi, \eta, \zeta \\
a : b : (c + \Delta c), & \xi, \eta, \zeta \\
a : b : c & \xi + \Delta \xi, \eta, \zeta \\
a : b : c & \xi, \eta + \Delta \eta, \zeta \\
a : b : c & \xi, \eta, \zeta + \Delta \zeta
\end{array}$$

übergehen. Indem wir jedesmal die zugehörigen Werthe der beobachteten Winkel berechnen, erhalten wir für letztere nacheinander die Grössen

$$\begin{array}{lll} L_1 & M_1 & N_1 \dots \\ L_2 & M_2 & N_2 \dots \\ L_3 & M_3 & N_3 \dots \\ L_4 & M_4 & N_4 \dots \\ L_5 & M_5 & N_5 \dots \end{array}$$

Wegen der Kleinheit sämmtlicher Aenderungen wird die Aenderung der Grössen (3) ebenfalls $p$mal grösser werden, wenn man irgend einem Stücke der Elemente eine Aenderung ertheilt, die $p$mal grösser als die vorhergehende ist; ebenso wird sich die Aenderung der Grössen (3) summiren, wenn mehrere Stücke zugleich geändert werden. Man kann also fragen, wie vielmal mehr muss jedes Stück der Elemente geändert werden, damit die Aenderung der Grössen (3) diese Grössen gleich den beobachteten Werthen (1) macht. Sind also diese gesuchten neuen Elemente

$$(4) \dots a:(b+u\Delta b):(c+v\Delta b), \quad \xi+x\Delta\xi, \quad \eta+y\Delta\eta, \quad \zeta+z\Delta\zeta$$

so hat man zur Bestimmung der 5 Grössen u, v, x, y, z die Gleichungen

$$L-L_0=(L_1-L_0)u+(L_2-L_0)v+(L_3-L_0)x+(L_4-L_1)y+(L_5-L_1)z$$
$$M-M_0=(M_1-M_0)u+(M_2-M_0)v+(M_3-M_0)x+(M_4-M_1)y+(M_5-M_1)z$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

deren Zahl grösser als fünf ist.

Um aus diesen Gleichungen die wahrscheinlichsten Werthe der Grössen u, v, x, y, z nach den Regeln der Methode der kleinsten Quadrate zu finden, hat man sie zuerst der Reihe nach mit den Grössen

$$\sqrt{l}, \sqrt{m}, \sqrt{n} \dots$$

zu multipliziren, nach welcher Operation wir die Gleichungen kurz durch

$$(6) \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} D_1 = e_1u+f_1v+g_1x+h_1y+k_1z \\ D_2 = e_2u+f_2v+g_2x+h_2y+k_2z \\ \dots\dots\dots\dots \end{array} \right.$$

bezeichnen wollen. Aus den Koeffizienten der letzten Gleichungen bilde man nun die folgenden fünf neuen Gleichungen:

$$(6) \dots \left\{ \begin{array}{l} \Sigma De = u\Sigma e^2 + v\Sigma fe + x\Sigma ge + y\Sigma he + z\Sigma ke \\ \Sigma Df = u\Sigma ef + v\Sigma f^2 + x\Sigma gf + y\Sigma hf + z\Sigma kf \\ \Sigma Dg = u\Sigma eg + v\Sigma fg + x\Sigma g^2 + y\Sigma hg + z\Sigma kg \\ \Sigma Dh = u\Sigma eh + v\Sigma fh + x\Sigma gh + y\Sigma h^2 + z\Sigma kh \\ \Sigma Dk = u\Sigma ek + v\Sigma fk + x\Sigma gk + g\Sigma hk + z\Sigma k^2 \end{array} \right.$$

welche zur Bestimmung der fünf Grössen u, v, x, y, z gerade hinreichen. Setzt man die so bestimmten Werthe dieser Grössen in die Ausdrücke (4) so geben die letzteren die gesuchten wahrscheinlichen Werthe der Elemente.

Hat man die genäherten Werthe (2) der Elemente etwa aus den fünf ersten Winkeln (1) berechnet, so werden natürlich in den Gleichungen (5) die Grössen $D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = D_5 = 0$.

Es ist klar, dass für spezielle Axensysteme die Rechnung sich desto mehr vereinfacht, je weniger unbekannte Stücke die Elemente enthalten. In Betreff eines Beispiels einer solchen Rechnung verweisen wir auf die Abhandlung von Prof. V. R. v. Zepharovich: Kryst. Studien über den Idokras, Sitzber. d. Wr. Ak. XLIX (1864).

Anhang.

Reduktion der Bezeichnungen von Naumann und Levy.

Ohne auf eine Darlegung der Principien, nach welchen Naumann und Levy die Formen der verschiedenen Systeme bezeichnen, einzugehen, werden wir hier nur kurz die von ihnen gebrauchten Bezeichnungen mit den in diesem Buche benützten Buchstaben und Symbolen nebeneinander stellen.

I. Bezeichnung nach Naumann.

Ist in einem der nachfolgenden Symbole m oder n gleich 1, so wird dieser Buchstabe ganz ausgelassen; solche Symbole sind im Nachfolgenden meist nicht berücksichtigt, da ihre Reduktion leicht mit Hilfe des allgemeinen Symbols geschehen kann. Naumann legt die XAxe von oben nach unten, die YAxe wie in diesem Buche von vorne nach hinten, die ZAxe aber von rechts nach links.

Tesserales System.

$$\mathrm{mOn} = \left\{1\,\tfrac{1}{n}\,\tfrac{1}{m}\right\}$$

$$+\frac{\mathrm{mOn}}{2} = \varkappa\left\{1\,\tfrac{1}{n}\,\tfrac{1}{m}\right\} \qquad -\frac{\mathrm{mOn}}{2} = \varkappa\left\{\bar{1}\,\tfrac{1}{n}\,\tfrac{1}{m}\right\}$$

$$+\left[\frac{\mathrm{mOn}}{2}\right] = \pi\left\{\tfrac{1}{n}\,1\,\tfrac{1}{m}\right\} \qquad -\left[\frac{\mathrm{mOn}}{2}\right] = \pi\left\{1\,\tfrac{1}{n}\,\tfrac{1}{m}\right\}$$

$$\frac{\mathrm{mOn}}{4} = \varkappa\pi\left\{\tfrac{1}{n}\,1\,\tfrac{1}{m}\right\}$$

Tetragonales System.

$$a : c : c = c : a : a$$

$$mPn = \left\{1 \tfrac{1}{n} \tfrac{1}{m}\right\}$$

$$d\,\frac{mPn}{2} = \varkappa \left\{1 \tfrac{1}{n} \tfrac{1}{m}\right\} \qquad l\,\frac{mPn}{2} = \varkappa \left\{\tfrac{1}{n}\, 1\, \tfrac{1}{m}\right\}$$

$$+\frac{mPn}{2} = \chi \left\{1 \tfrac{1}{n} \tfrac{1}{m}\right\} \qquad -\frac{mPn}{2} = \chi \left\{\bar{1} \tfrac{1}{n} \tfrac{1}{m}\right\}$$

$$\frac{d}{l}\,\frac{mPn}{2} = \pi \left\{1 \tfrac{1}{n} \tfrac{1}{m}\right\} \qquad \frac{l}{d}\,\frac{mPn}{2} = \pi \left\{\tfrac{1}{n}\, 1\, \tfrac{1}{m}\right\}$$

$$+\frac{d}{l}\,\frac{mPn}{4} = \varkappa\pi \left\{1 \tfrac{1}{n} \tfrac{1}{m}\right\} \qquad +\frac{l}{d}\,\frac{mPn}{4} = \varkappa\pi \left\{\tfrac{1}{n}\, 1\, \tfrac{1}{m}\right\}$$

$$-\frac{d}{l}\,\frac{mPn}{4} = \varkappa\pi \left\{\tfrac{\bar{1}}{n}\, 1\, \tfrac{1}{m}\right\} \qquad -\frac{l}{d}\,\frac{mPn}{4} = \varkappa\pi \left\{\bar{1} \tfrac{1}{n} \tfrac{1}{m}\right\}$$

Rhombisches System.

$$a : b : c = c : b : a$$

$$b > c \qquad b > a$$

$$m\breve{P}n = \left\{1 \tfrac{1}{n} \tfrac{1}{m}\right\} \qquad m\bar{P}n = \left\{\tfrac{1}{n}\, 1\, \tfrac{1}{m}\right\}$$

$$d\,\frac{m\breve{P}n}{2} = \varkappa \left\{1 \tfrac{1}{n} \tfrac{1}{m}\right\} \qquad d\,\frac{m\bar{P}n}{2} = \varkappa \left\{\tfrac{1}{n}\, 1\, \tfrac{1}{m}\right\}$$

$$l\,\frac{m\breve{P}n}{2} = \varkappa \left\{\bar{1} \tfrac{1}{n} \tfrac{1}{m}\right\} \qquad l\,\frac{m\bar{P}n}{1} = \varkappa \left\{\tfrac{\bar{1}}{n}\, 1\, \tfrac{1}{m}\right\}$$

Monoklinisches System.

$$a : b : c = c : a : b$$

$$\gamma = C = 180^0 - \eta$$

$$+\, m\rlap{\,\backslash}Pn = \left\{\tfrac{\bar{1}}{n}\, 1\, \tfrac{1}{m}\right\} \qquad -\, m\rlap{\,\backslash}Pn = \left\{\tfrac{1}{n}\, 1\, \tfrac{1}{m}\right\}$$

$$+\, m\rlap{-}Pn = \left\{\bar{1} \tfrac{1}{n} \tfrac{1}{m}\right\} \qquad -\, m\rlap{-}Pn = \left\{1 \tfrac{1}{n} \tfrac{1}{m}\right\}$$

Triklinisches System.

$$a : b : c = c : b : a$$

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma = \xi,\ \eta,\ \zeta$$

$$A, B, C = 180^0 - UW,\ 180^0 - WU,\ 180^0 - VW$$

$$m\breve{P}'n = \left\{1 \tfrac{1}{n} \tfrac{1}{m}\right\} \qquad m\bar{P}'n = \left\{\tfrac{1}{n}\, 1\, \tfrac{1}{m}\right\}$$

$$m'\breve{P}n = \left\{\bar{1} \tfrac{1}{n} \tfrac{1}{m}\right\} \qquad m'\bar{P}n = \left\{\tfrac{\bar{1}}{n}\, 1\, \tfrac{1}{m}\right\}$$

$$m\breve{P},n = \left\{1 \tfrac{1}{n} \tfrac{\bar{1}}{m}\right\} \qquad m\bar{P},n = \left\{\tfrac{1}{n}\, 1\, \tfrac{\bar{1}}{m}\right\}$$

$$m,\breve{P}n = \left\{\bar{1} \tfrac{1}{n} \tfrac{\bar{1}}{m}\right\} \qquad m,\breve{P}n = \left\{\tfrac{\bar{1}}{n}\, 1\, \tfrac{\bar{1}}{m}\right\}$$

Hexagonales System.

XAxe = Normale zur Fläche (111)
YAxe = „ „ „ $(1\bar{1}0)$
ZAxe = „ „ „ $(10\bar{1})$
$a : c : c$ = Parameter der Fläche (100)

$$\frac{3c}{\sqrt{4a^2 + 5c^2}} = \tan \frac{\xi}{2} \;[1]$$

$$\begin{aligned} mPn &= \{hkl\} \\ oP &= \{111\} \\ mP &= \{1+2m, 1-m, 1-m\} \\ \infty P &= \{2\bar{1}\bar{1}\} \\ mP2 &= \{3m+2, 2, 2-3m\} \\ mP\infty &= \{10\bar{1}\} \end{aligned} \qquad \left\{\begin{aligned} h &= \tfrac{1}{m} + \tfrac{1}{n} + 1 \\ k &= \tfrac{1}{m} - \tfrac{2}{n} + 1 \\ l &= \tfrac{1}{m} + \tfrac{1}{n} - 2 \end{aligned}\right. \quad \left\{\begin{aligned} e &= \tfrac{1}{m} - \tfrac{1}{n} - 1 \\ f &= \tfrac{1}{m} + \tfrac{2}{n} - 1 \\ g &= \tfrac{1}{m} - \tfrac{1}{n} + 2 \end{aligned}\right.$$

$$d\,\frac{mPn}{2} = \varkappa\,\{hlk\} \qquad l\,\frac{mPn}{2} = \varkappa\,\{hkl\}$$

$$+\frac{mPn}{2} = \pi\,\{hkl\} \qquad -\frac{mPn}{2} = \pi\,\{efg\}$$

$$mRn = \frac{mnP\frac{2n}{n+1}}{2} = \pi\,\{2 + m + 3mn,\ 2 - 2m,\ 2 + m - 3mn\}$$

$$+d\,\frac{mPn}{4} = \varkappa\pi\{hlk\} \qquad +l\,\frac{mPn}{4} = \varkappa\pi\{hkl\}$$

$$-d\,\frac{mPn}{4} = \varkappa\pi\,\}egf\} \qquad -l\,\frac{mPn}{4} = \varkappa\pi\{efg\}$$

$$\frac{d}{l}\,\frac{mPn}{2} = \varphi\,\{hlk\} \qquad \frac{d}{l}\,\frac{mPn}{2} = \varphi\{hkl\}$$

$$\left.\begin{aligned} \pm\frac{d}{l}\,\frac{mPn}{4} \\ \pm\frac{l}{d}\,\frac{mPn}{4} \end{aligned}\right\}$$ Sind Rhomboeder in gedrehter Stellung, siehe Anmerkung zu §. 50.

Für die Bezeichnungsweise von Weiss hat man in diesem Systeme

$$\begin{aligned} mc : na : a : sa &= \{hkl\} \\ mc : na' : a' : sa' &= \{efg\} \end{aligned} \qquad \frac{1}{s} = 1 - \frac{1}{n}$$

---

[1]) Zur logarithmischen Berechnung hat man die Formeln

$$\tan \frac{\xi}{2} = {}^6/_{10} \cos \delta,\ \tan \delta = {}^8/_{10}\,\frac{a}{c}$$

oder

$$\frac{c}{d} : \frac{a}{p} : \frac{a}{q} : \frac{a}{r} = \{d+p+q, d+q-2p, d+p-2q\} \qquad r = q - p$$

$$\frac{c}{d} : \frac{a'}{p} : \frac{a'}{q} : \frac{a'}{r} = \{d-2p-r, d+p-r, d+p-2r\}$$

II. Bezeichnung nach Levy.

Das Nachfolgende bezieht sich auf die Bezeichnung von Levy, wie sie mit einigen Vervollständigungen von Descloizeaux (Manuel de Min. t. I., Paris 1862) angewendet wird.

Système cubique (Tesserales System).

$p = \{100\}$
$a^1 = \{111\}$
$b^1 = \{110\}$

$b^u = \{u10\}$
$a^u = \{u11\}$ wenn $u > 1$
$a^u = \{11u\}$ wenn $u < 1$
$b^{\frac{1}{u}}\ b^{\frac{1}{v}}\ b^{\frac{1}{w}} = \{wvu\}$

Système quadratique (Tetragonales System).

$D : D : h = a : a : c$

$p = \{110\}$
$m = \{110\}$
$h^1 = \{100\}$
$h^{\frac{u}{v}} = \{u+v, u-v, 0\}$
$a^1 = \{101\}$
$a^u = \{10u\}$

$b^{1/2} = \{111\}$
$b^u = \{1, 1, 2u\}$
$b^{\frac{1}{u}}\ b^{\frac{1}{v}}\ h^{\frac{1}{w}} = \{\frac{v+u}{2}\ \frac{v-u}{2}\ w\}$
$a_{\frac{v}{w}} = b^{\frac{1}{w}}\ b^{\frac{1}{v}}\ h^{\frac{1}{w}} = \{\frac{v+w}{2}\ \frac{v-w}{2}\ w\}$
$a_{\frac{u}{w}} = b^{\frac{1}{u}}\ b^{\frac{1}{w}}\ h^{\frac{1}{w}} = \{\frac{w+u}{2}\ \frac{w-u}{2}\ w\}$

Systeme rhombique (Rhombisches System).

$D : d : h = a : b : c$

$p = \{001\}$
$m = \{110\}$
$h^1 = \{010\}$
$h^{\frac{u}{v}} = \{u-v, u+v, 0\}$
$g^1 = \{100\}$
$g^{\frac{u}{v}} = \{u+v, u-v, 0\}$
$l^u = \{10u\}$
$a^u = \{01u\}$
$b^u = \{1, 1, 2u\}$

$b^{\frac{1}{u}}\ b^{\frac{1}{v}}\ g^{\frac{1}{w}} = \{\frac{v+u}{2}\ \frac{v-u}{2}\ w\}$
$b^{\frac{1}{u}}\ b^{\frac{1}{v}}\ h^{\frac{1}{w}} = \{\frac{v-u}{2}\ \frac{v+u}{3}\ w\}$
$e_{\frac{v}{w}} = b^{\frac{1}{w}}\ b^{\frac{1}{v}}\ g^{\frac{1}{w}} = \{\frac{v+w}{2}\ \frac{v-w}{2}\ w\}$
$e_{\frac{u}{w}} = b^{\frac{1}{u}}\ b^{\frac{1}{w}}\ g^{\frac{1}{w}} = \{\frac{w-u}{2}\ \frac{w+u}{2}\ w\}$
$a_{\frac{v}{w}} = b^{\frac{1}{w}}\ b^{\frac{1}{v}}\ h^{\frac{1}{w}} = \{\frac{v-w}{2}\ \frac{v+w}{2}\ w\}$
$a_{\frac{u}{w}} = b^{\frac{1}{u}}\ b^{\frac{1}{w}}\ h^{\frac{1}{w}} = \{\frac{w-u}{2}\ \frac{w+u}{2}\ w\}$

Système clinorhombique (Monoklinisches System).

$d : D : h = a : b : c$

$a^1 h^1 \text{ adj.} = \xi$

$p = \{001\}$
$m = \{110\}$
$h^1 = \{100\}$
$h^{\frac{u}{v}} = \{u+v,\ u-v,\ 0\}$
$g^1 = \{010\}$
$g^{\frac{u}{v}} = \{u-v,\ u+v,\ 0\}$
$e^u = \{01u\}$
$o^u = \{10u\}$
$a^u = \{\bar{1}0u\}$
$d^u = \{1,\ 1,\ 2u\}$
$b^u = \{\bar{1},\ 1,\ 2u\}$

$d^{\frac{1}{u}}\ d^{\frac{1}{v}}\ h^{\frac{1}{w}} = \left\{\frac{v+u}{2}\ \frac{v\ \ u}{2}\ w\right\}$

$b^{\frac{1}{u}}\ b^{\frac{1}{v}}\ h^{\frac{1}{w}} = \left\{\frac{\bar{v}+\bar{u}}{2}\ \frac{v-u}{2}\ w\right\}$

$a^{\frac{v}{w}} = b^{\frac{1}{w}}\ b^{\frac{1}{v}}\ h^{\frac{1}{w}} = \left\{\frac{\bar{v}+\bar{w}}{2}\ \frac{v-w}{2}\ w\right\}$

$a^{\frac{u}{w}} = b^{\frac{1}{u}}\ b^{\frac{1}{w}}\ h^{\frac{1}{w}} = \left\{\frac{\bar{w}+\bar{u}}{2}\ \frac{w-u}{2}\ w\right\}$

$d^{\frac{1}{u}}\ b^{\frac{1}{w}}\ g^{\frac{1}{w}} = \left\{\frac{v-u}{2}\ \frac{v+u}{2}\ w\right\}$

$b^{\frac{1}{u}}\ d^{\frac{1}{v}}\ g^{\frac{1}{w}} = \left\{\frac{u-v}{2}\ \frac{v+u}{2}\ w\right\}$

$o^{\frac{v}{w}} = d^{\frac{1}{w}}\ d^{\frac{1}{v}}\ h^{\frac{1}{w}} = \left\{\frac{v+w}{2}\ \frac{v-w}{2}\ w\right\}$

$o^{\frac{u}{w}} = d^{\frac{1}{u}}\ d^{\frac{1}{w}}\ h^{\frac{1}{w}} = \left\{\frac{w+u}{2}\ \frac{w-u}{2}\ w\right\}$

Système anorthique (Triklinisches System).

$D : d : h = a : b : c$

$p = \{001\}$
$t = \{110\}$
$m = \{\bar{1}10\}$
$h^1 = \{010\}$
$h^{\frac{u}{v}} = \{u-v,\ u+v,\ 0\}$
${}^{\frac{u}{v}}h = \{v-u,\ v+u,\ 0\}$
$g^1 = \{100\}$
$g^{\frac{u}{v}} = \{u+v,\ u-v,\ 0\}$
${}^{\frac{u}{v}}g = \{\bar{u}+\bar{v},\ u-v,\ 0\}$
$i^u = \{10u\}$
$e^u = \{\bar{1}0u\}$
$o^u = \{01u\}$
$a^u = \{01\bar{u}\}$

$f^u = \{1,\ 1,\ 2u\}$
$d^u = \{\bar{1},\ 1,\ 2w\}$
$b^u = \{1,\ 1,\ -2u\}$
$c^u = \{\bar{1},\ 1,\ -2u\}$

$f^{\frac{1}{u}}\ c^{\frac{1}{v}}\ g^{\frac{1}{w}} = \left\{\frac{v+u}{2}\ \frac{v-u}{2}\ w\right\}$

$c^{\frac{1}{u}}\ f^{\frac{1}{v}}\ g^{\frac{1}{w}} = \left\{\frac{\bar{v}+\bar{u}}{2}\ \frac{v-u}{2}\ \bar{w}\right\}$

$b^{\frac{1}{u}}\ d^{\frac{1}{v}}\ g^{\frac{1}{w}} = \left\{\frac{v+u}{2}\ \frac{v-u}{2}\ \bar{w}\right\}$

$d^{\frac{1}{u}}\ b^{\frac{1}{v}}\ g^{\frac{1}{w}} = \left\{\frac{\bar{v}+\bar{u}}{2}\ \frac{v-u}{2}\ w\right\}$

$b^{\frac{1}{u}}\ c^{\frac{1}{v}}\ g^{\frac{1}{w}} = \left\{\frac{v\ \ u}{2}\ \frac{v+u}{2}\ w\right\}$

$c^{\frac{1}{u}}\ b^{\frac{1}{v}}\ g^{\frac{1}{w}} = \left\{\frac{u\ \ v}{2}\ \frac{v+u}{2}\ w\right\}$

$f^{\frac{1}{u}}\ d^{\frac{1}{v}}\ h^{\frac{1}{w}} = \left\{\frac{v-u}{2}\ \frac{v+u}{2}\ w\right\}$

$d^{\frac{1}{u}}\ f^{\frac{1}{v}}\ h^{\frac{1}{w}} = \left\{\frac{u-v}{2}\ \frac{v+u}{2}\ w\right\}$

Système hexagonal (Holohexagonales und gyroidales System).

$p = \{111\}$
$m = \{2\bar{1}\bar{1}\}$
$h^1 = \{10\bar{1}\}$
$h^u = \{-2u-1,\ u-1,\ u+2\}$

$b^u = \{2+u,\ u-1,\ u-1\}$
$a^u = \{3+u,\ u,\ u-3\}$

$b^{\frac{1}{u}}\ b^{\frac{1}{v}}\ b^{\frac{1}{w}} = \{2u+v+w,\ -u-v+w,\ u+w\}$

Système rhomboedrique (Rhomboedrisches System).

Angle plan du sommet $= \xi$

$a^1 = \pi\{111\}$

$e^2 = \pi\{2\bar{1}\bar{1}\}$

$d^1 = \pi\{10\bar{1}\}$

$a^u = \pi\{u11\}$

$e^u = \pi\{\bar{u}11\}$

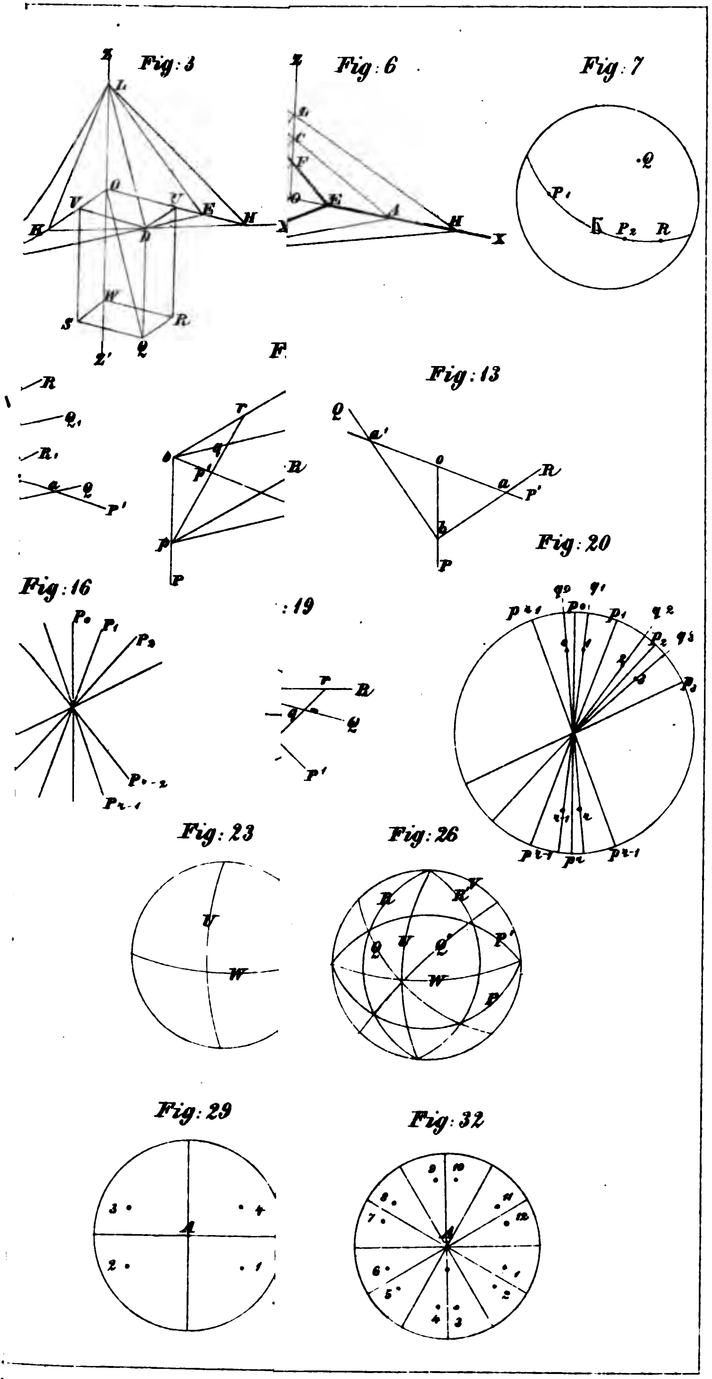
$b^u = \pi\{u10\}$

$d^u = \pi\{u\bar{1}0\}$

$b^{\frac{1}{u}} \quad d^{\frac{1}{v}} \quad d^{\frac{1}{w}} = \pi\{u\bar{v}\bar{w}\}$

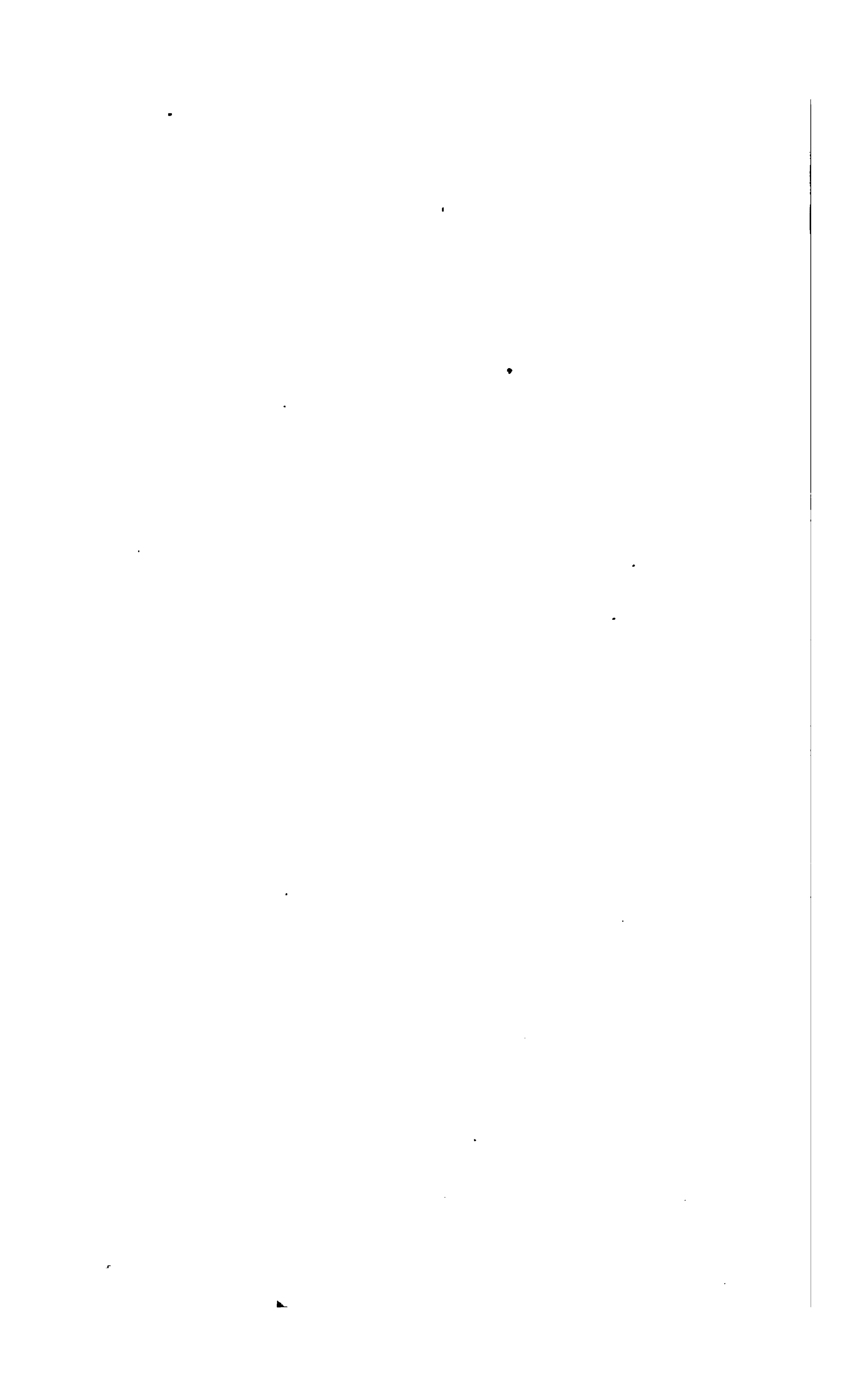
$b^{\frac{1}{u}} \quad b^{\frac{1}{v}} \quad b^{\frac{1}{w}} = \pi\{uvw\}$

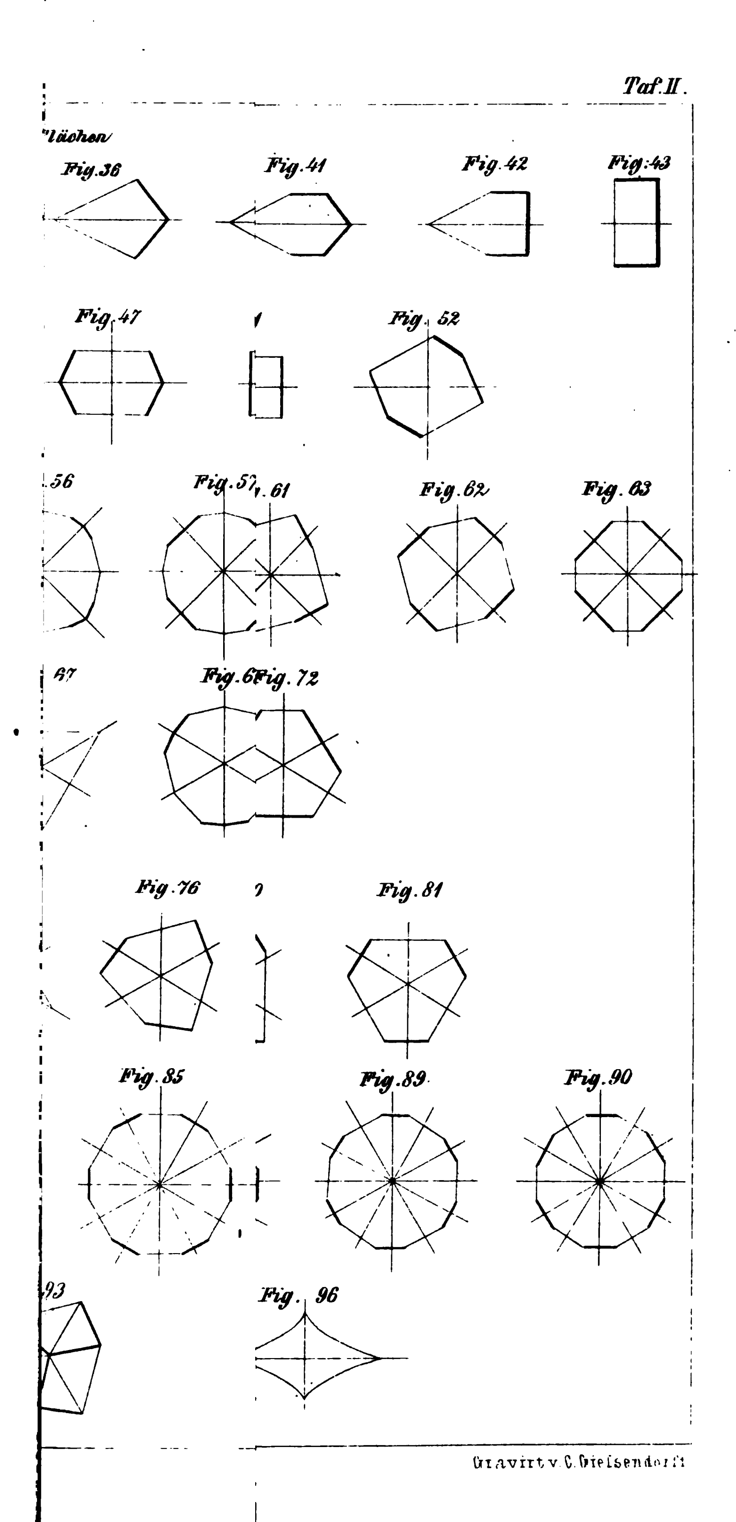
$d^{\frac{1}{u}} \quad d^{\frac{1}{v}} \quad b^{\frac{1}{w}} = \pi\{uv\bar{w}\}$



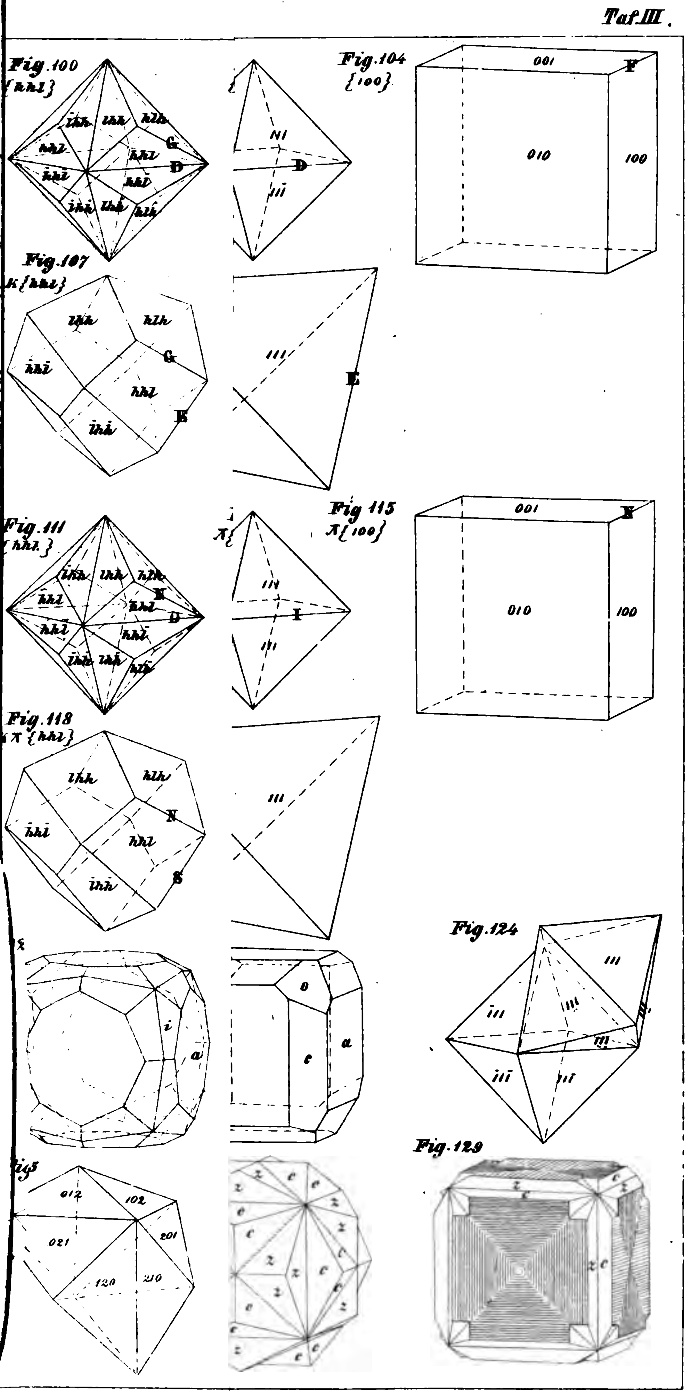
Verlag v. W. F

Gravirt v. C. Giesendorff

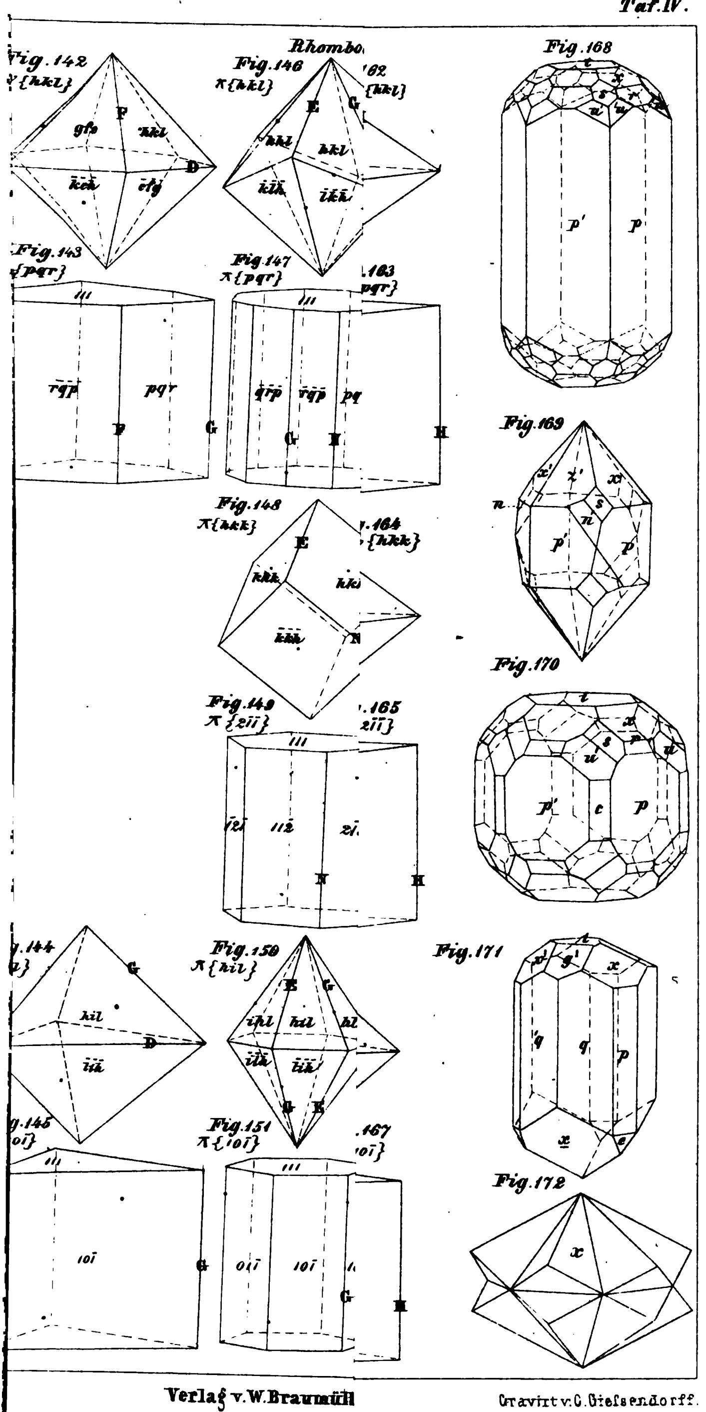




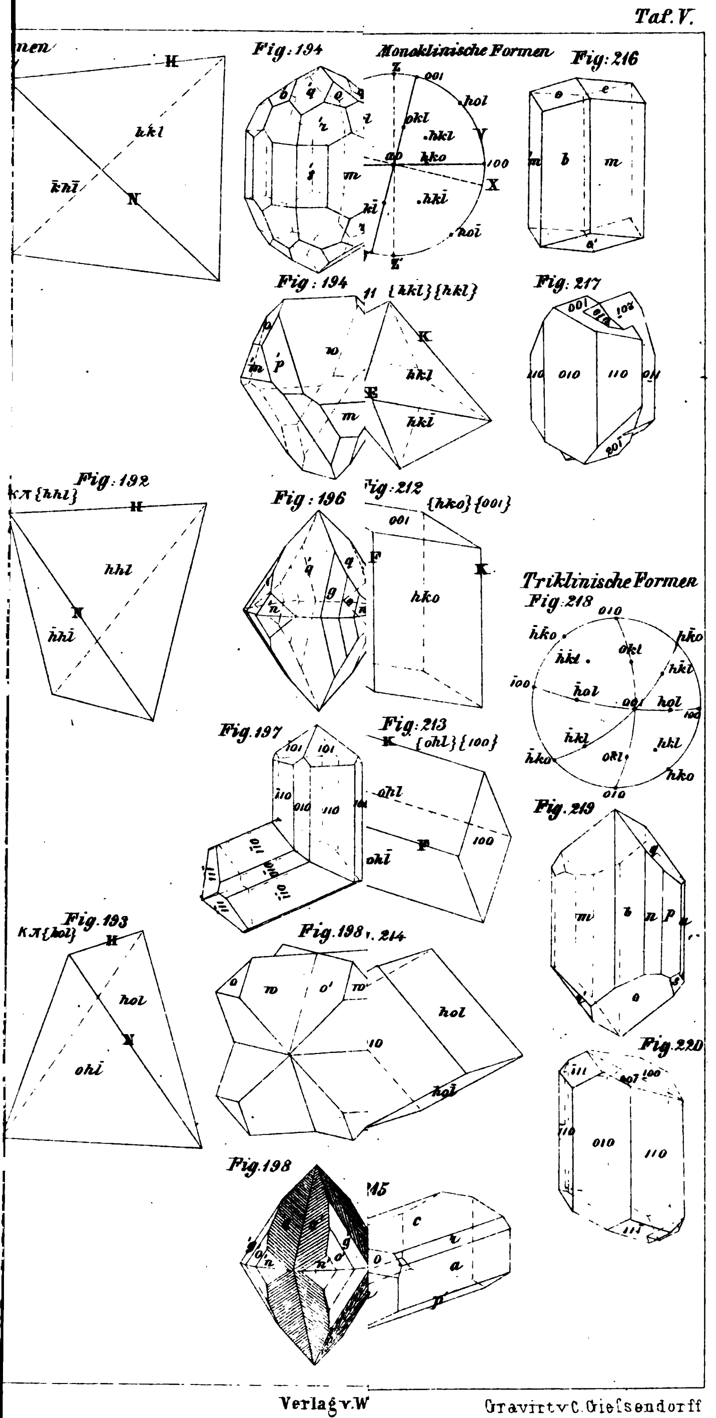
Gravirt v. C. Diefsendorf



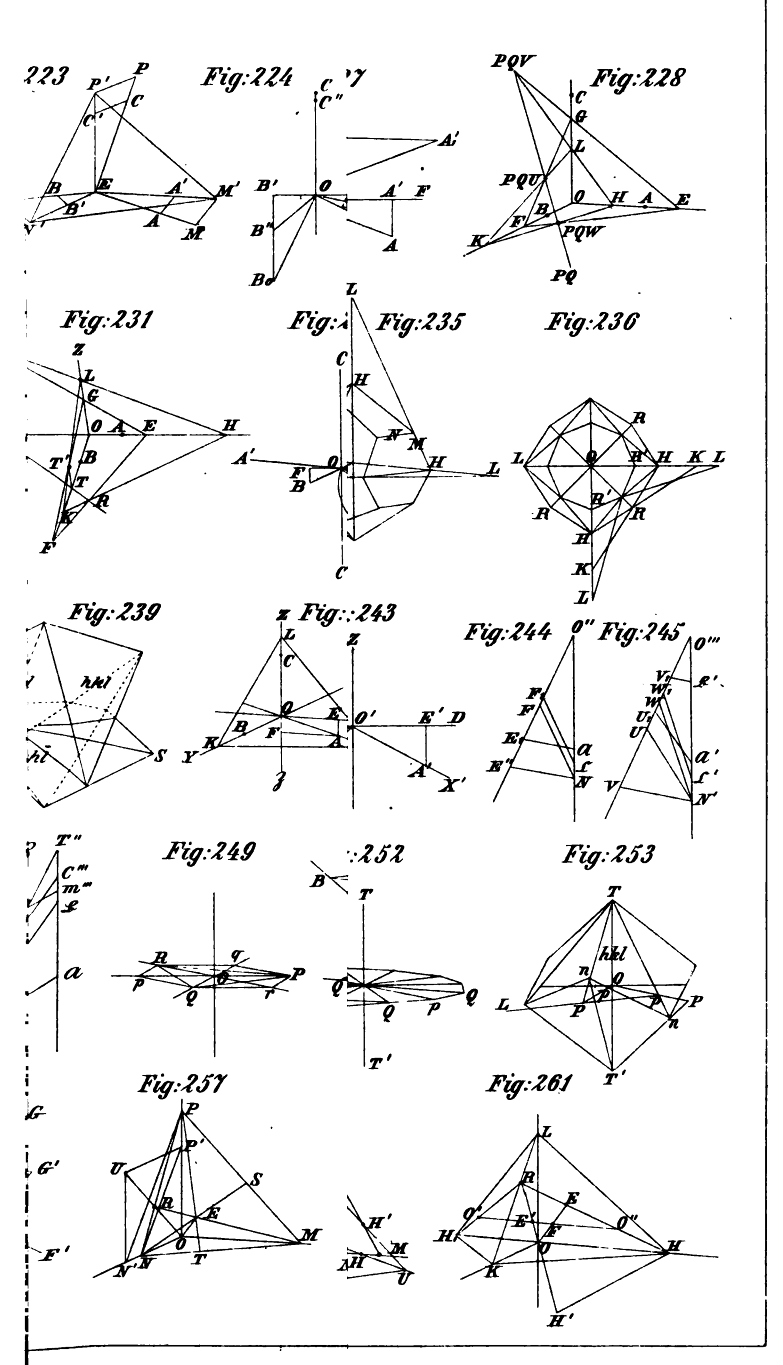
Gravirt v. Giesendorff.



Verlag v. W. Braumüll Gravirt v. C. Giessendorff.



Verlag v. W
Gravirt v. C. Giesendorff



Verl

Art. Anst. v. Reiffenstein & Rösch, Wien.

